ÜBUNG 1 WIEDERHOLUNG FÜR KLAUSUR: GEBEN SIE MÖGLICHST KURZE ANTWORTEN AUF DIE FOLGENDEN FRAGEN:

Sei durch $u'(t) = f(u(t), t),\ t \geq t_0,\ u(t_0) = u_0$ mit $f : D \to \mathbb{R}^d$ und $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ eine AWA gegeben.

1. Sei speziell $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und f stetig. Was besagt der Satz von Peano über die Lösung der AWA. Welche weitere Bedingung an die lokalen Lösungen (aus Peano) ist für die Existenz einer globalen Lösung hinreichend? Welche weitere Bedingung f ist für die Existenz einer globalen Lösung hinreichend?
2. Sei speziell $d = 1$ und $f(x,t) = f(x) = \sqrt{x}$, $t_0 = 0$, $u_0 = 0$. Wie lautet dann die Lösung der AWA?
3. Sind Lösungen linearer AWA mit stetigen Koeffizienten eindeutig?
4. Erläutern Sie die Idee des Taylor-Verfahrens und seinen wesentlichsten Nachteil bei der Integration mit hoher Konsistenzordnung.
5. Was ist ein Butcher-Tableau?
6. In der Vorlesung haben sie zwei verschiedene Verfahren zur Schrittweitensteuerung kennen gelernt. Skizzieren Sie grob die Ideen der beiden Verfahren.
7. Was bedeuten für eine Differenzenformel die Bezeichnungen A-stabil und $A(\alpha)$-stabil.
8. Was ist die *Padé-Approximation* und wie wird sie motiviert?

keine Punkte

ÜBUNG 2 ELLIPTISCHE PROBLEME (PROGRAMMIERAUFGABE)

Die partielle Differentialgleichung

$$-\nabla\left(\nabla u(x)\right) = q(x) \quad \forall x \in \Omega$$

mit $k \in C^1(\bar{\Omega})$ beschreibt ein elliptisches Problem auf einem beschränkten, offenen Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$. In einem einfachen Diskretisierungs-Ansatz, werden die Ableitungen unter Anwendung eines Differenzen-Verfahrens diskretisiert. Hierzu definiert man für gegebenes $h \in \mathbb{R}^2$ die Punktmenge

$$\mathcal{T} = \{x := \sum_{j=1}^{2} e_j\, h_j\, \alpha_j \;\big|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z} \wedge x \in \Omega\}.$$

Da die Anzahl der Gitterpunkte $N := |\mathcal{T}|$ endlich ist, existiert eine Folge $(x_i)_{1\leq i\leq N}$ mit $\mathcal{T} = \{x_i \mid i = 1 \ldots N\}$ und man löst die Gleichungen

$$\Gamma_i := -\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{h_j^2}\left((\tilde{u}(x_i + h_j) - \tilde{u}(x_i)) - (\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_i - h_j))\right) - q(x_i) = 0, \qquad \forall i \in 1, \ldots, N. \quad (1)$$

wobei $\tilde{u}$ eine Gitterfunktion bezeichnet, welche nur in den Punkten von $\mathcal{T}$ definiert ist. Mit $U \in \mathbb{R}^N$ und $(U)_i := \tilde{u}(x_i)$ können wir durch $(F(U))_i := \Gamma_i$ die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definieren und das diskrete Problem aus Gleichung (1) kann als

$$F(U) = 0 \quad (2)$$

geschrieben werden. Dieses lineare Gleichungssystem kann dann mit einem direkten Lösungsverfahren gelöst werden. (In der Implementierung wird die LR-Zerlegung verwendet)

Die Datei *hdnum/src/pde.hh* enthält die Implementierung einer stationären Löserklasse, welche dazu gedacht ist, Gleichungen vom Typ 2 zu lösen. Eine Beispiel-Implementierung des zur Laplace Gleichung $\Delta u = 1$ gehörenden Modellproblem finden sie in *laplace.hh*. Eine kommentierte Beispielanwendung finden Sie in *laplace.cc*. Die dort geschriebenen Gnuplot Dateien, können Sie einfach durch den Befehl `gnuplot dateiname.gp` betrachten. Zum genauen Verständnis des Codes kann auch ein Blick in die Datei *hdnum/src/sgrid.hh* hilfreich sein, in welcher eine Helfer-Klasse für das Gitter $\mathcal{T}$ implementiert ist.

1. Machen Sie sich mit dem Beispiel in *laplace.cc* und der Implementierung in *laplace.hh* vertraut. Letztere erlaubt die Anwendung von Dirichlet Rändern. Gleichung 1 (mit $q(x) = 1$) wird dabei nur für Punkte innerhalb des Gitters verwendet und für Punkte auf dem Gitterrand modifiziert. Geben Sie analog die Gleichungen an, welche von der Implementierung für Dirichlet Knoten in diesen Punkten gelöst werden.

2. Verändern Sie laplace.hh so, dass die Gleichung $\Delta u = 10, \quad u_{\partial\Omega}| = 1$ gelöst wird und plotten Sie Lösung.

3. Wie sieht die Struktur der Jacobimatrix von $(F(U))_i$ für den Spezialfall $h = 1$ aus (im Programm wird die Matrix in der Funktion f_x berechnet)?
   Hinweis: Diese Aufgabe können Sie ohne Programmieren lösen!

6 Punkte

Hinweise zur Klausur

- Bitte bringen Sie unbedingt einen **amtlichen Lichtbildausweis** mit.
- Die Klausur wird am Dienstag den 21.02.2012 um 9:00 Uhr im HS1, INF 306 (neben dem Unishop) geschrieben.
- Eine explizite Anmeldung zur Klausur ist nicht notwendig. Wer die Kriterien der Übungsgruppe erfüllt hat gilt als angemeldet im Sinne der Studienordnung.
- Die Teilnahme an der Klausur ist für Studenten aller Studiengänge verpflichtend, um eine benotete Bescheinigung für die Teilnahme an der Vorlesung zu erhalten.
- Zur Klausur darf ein beidseitig mit Formeln und Notizen handbeschriebenes DIN-A4 Blatt mitgebracht werden (Kopien sind nicht zulässig!).
- Bei Bedarf wird eine Nachklausur angeboten. An dieser dürfen nur Studenten teilnehmen, welche an der ersten Klausur teilgenommen aber nicht bestanden oder entschuldigt gefehlt haben. Der Termin für die Nachklausur ist Montag, der 02.04.2012 um 10:00 Uhr im HS1 in der Reinen Mathe (INF 288).