ÜBUNG 1 UMFORMUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

Formen Sie die folgenden Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung in äquivalente Systeme erster Ordnung um.

1.

$$\begin{aligned} v''''(x) - a(x)u'(x) &= f(x), \\ u''(x) + b(x)v(x) &= g(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} v''''(x) - a(x)u''(x) &= f(x), \\ u''(x) + b(x)v(x) &= g(x) \end{aligned}$$

4 Punkte

ÜBUNG 2 LÖSBARKEITSEIGENSCHAFTEN

Untersuchen Sie mit Hilfe der Resultate aus der Vorlesung die Lösbarkeitseigenschaften (eindeutig, global, beschränkt, exponentiell stabil) der folgenden AWA:

1. $u'(t) = u(t)^2, \qquad t \geq 0,\ u(0) = 1,$
2. $u'(t) = -u(t)^2, \qquad t \geq 0,\ u(0) = 1,$
3. $u'(t) = u(t)^{1/2}, \qquad t \geq 0,\ u(0) = 1,$
4. $u'(t) = \cos(u(t)) - 2u(t), \quad t \geq 0,\ u(0) = 1.$

4 Punkte

ÜBUNG 3 LINEARE ANFANGSWERTAUFGABEN

1. Zeigen Sie, dass für die lineare AWA

$$y'(t) = ay(t) + b(t), \quad t \geq t_0, \qquad y(t_0) = y_0 \qquad t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und stetigem $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}b(\tau)\,\mathrm{d}t$$

eine Lösung gegeben ist.

2. Bestimmen Sie die Lösung der AWA

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t), \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$.

4 Punkte

ÜBUNG 4 KONVERGENZORDNUNG (PROGRAMMIERAUFGABE)

Betrachten Sie die AWA

$$u'(t) = -200tu(t)^2, \quad t_0 := -3 \leq t \leq 3, \quad u(t_0) = \frac{1}{901}.$$

Schreiben Sie ein Programm, welches Approximationen der analytischen Lösung mit Hilfe des expliziten Euler Verfahrens berechnet. Verifizieren Sie für konstante Schrittweiten $h = 2^{-i}$, $i = 5, \ldots, 10$ die Konvergenz 1. Ordnung dieses Verfahrens zum Zeitpunkt $t = 1$. (Exakte Lösung $u(t) = (1 + 100t^2)^{-1}$)

4 Punkte