ÜBUNG 1 ABSCHNEIDEFEHLER

Zeigen Sie exemplarisch für das modifizierte Euler Verfahren zweiter Ordnung, dass der Abschneidefehler einer expliziten Runge-Kutta-Formel m-ter Ordnung eine Darstellung der Form

$$\tau_n = \tau^m(t_n)h_n^m + O(h_n^{m+1})$$

erlaubt wobei $\tau^m(t_n)$ nicht von h_n abhängt. (Hinweis: Erweitern Sie die Taylorentwicklung zur Ermittlung der Konsistenzordnung um eine Stufe.) *4 Punkte*

ÜBUNG 2 SCHRITTWEITENKONTROLLE

1. Wie lautet der Algorithmus zur Einbeziehung des globalen Fehlers, wenn statt einer Schrittweitenhalbierung eine Schrittweitenviertelung vorngenommen wird?
2. Ist diese Methode auch für implizite Einschrittverfahren

$$y_n = y_{n-1} + h_n F(h_n, t_{n-1}, y_{n-1}, y_n)$$

mit L-stetiger Verfahrensfunktion F anwendbar?

6 Punkte

ÜBUNG 3 SCHRITTWEITENKONTROLLE (PROGRAMMIERAUFGABE)

Betrachten Sie Näherungslösungen für die AWA

$$u'(t) = -200tu(t)^2, \quad t_0 := -3 \le t, \quad u(t_0) = \frac{1}{901}$$

auf dem Intervall $[-3, -1]$ mithilfe einer Runge Kutta Methode 3. Ordnung unter Verwendung der adaptiven Schrittweitensteuerung aus der Vorlesung. Dabei soll der Zeitschritt h_n der Beziehung

$$\frac{1}{2}h_n \le h_{opt}$$

genügen, wobei h_{opt} gemäß

$$h_{opt} := \left(\frac{(2h_n)^{m+1}(1-2^{-m})}{T|y_n^{2h} - y_n^h|}\, TOL \right)^{1/m}$$

berechnet wird. Eine heuristische Wahl für TOL ist durch

$$TOL = \epsilon\, \frac{|y_n^h|}{h_n}$$

gegeben, wobei zunächst $\epsilon = 10^{-10}$ gewählt werden kann.

1. Schreiben Sie ein Programm, welches die AWA mit der oben beschriebenen Schrittweitensteuerung löst. Beurteilen Sie die Güte der Schrittweitensteuerung durch Vergleich des maximalen Fehlers über das ganze Rechenintervall mit der exakten Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1+100t^2}.$$

2. Für welche konstante Schrittweite erzielt man diesselbe Genauigkeit?

6 Punkte