Numerik, Wintersemester 2011
Dr. Olaf Ippisch
Rebecca Neumann
IWR, Universität Heidelberg

Blatt 5
Abgabe 25. 11. 2011 bis 9:00
INF 288, links neben HS 2

ÜBUNG 1 STABILITÄTSINTERVALLE KONKRETER EINSCHRITTVERFAHREN

Geben Sie die Stabilitätsintervalle der folgenden Einschrittverfahren an:

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h\left(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right),\\
\text{b)}\quad y_{n+1} &= y_n + hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)),\\
\text{c)}\quad y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h\left(2f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 4f(t_n, y_n) + hf^{(1)}(t_n, y_n)\right), \quad f^{(1)} = f_t' + ff_x'.
\end{aligned}$$

5 Punkte

ÜBUNG 2 IMAGINÄRES STABILITÄTSINTERVALL

Bestimmen Sie das rein imaginäre Stabilitätsintervall (der Schnitt der imaginären Achse mit dem Stabilitätsgebiet)

$$\{\ iz \in \mathbb{C} \quad | \quad z \in \mathbb{R},\ |w(z)| \le 1\ \}$$

für die Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 1 bis 3. *3 Punkte*

ÜBUNG 3 STABILITÄT DIFFERENTIALGLEICHUNG 2TER ORDNUNG

Aus einer skalaren Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

mit einer differenzierbaren Funktion $f(x, y, z)$ gewinnt man durch Einführung der Hilfsfunktionen $u_1 := u$, $u_2 := u'$ ein System von Gleichungen 1ter Ordnung. Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix dessen rechter Seite im Falle $\partial_x f \ge 0$ nur reelle Eigenwerte hat. Welche Konsequenzen dies für die Approximierbarkeit dieses Problems mit Differenzenformeln hat, sehen Sie in der nächsten Vorlesung.

4 Punkte

ÜBUNG 4 SIMULATION STEIFER SYSTEME

Die 3-dimensionale, steife AWA

$$u' = Au(t), \quad t \ge 0, \quad u(0) = (1, 0, -1)^T,$$

mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\},\\
u_2(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\},\\
u_3(t) &= -e^{-40t}\left\{\cos(40t) - \sin(40t)\right\}.
\end{aligned}$$

1. Implementieren Sie eine Modell-Klasse für dieses Problem (analog zu der Implementierung für Aufgabe 3 Blatt 1).

2. Bestimmen Sie (experimentell) die (konstante) Schrittweite, für welche das klassische Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung gerade noch stabil ist. Eine Implementierung der expliziten Runge-Kutta Verfahren der Ordnungen eins bis vier finden Sie in der Datei *rungekutta.hh* auf der Vorlesungshomepage (der alternative Konstruktor erlaubt auch ganz allgemein die Übergabe eines beliebig großen Butcher-Tableaus).

3. Bestimmen Sie (experimentell) für das klassische Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung die größte (konstante) Schrittweite, welche eine Berechnung von $u(2) \in \mathbb{R}$ auf 10 Stellen genau erlaubt.

4 Punkte