Übung 1 Lineare Stabilitätsanalyse

Jede der in der Vorlesung betrachteten Einschrittmethoden nimmt angewendet auf ein lineares (autonomes) System $u'(t) = Au(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Form $y_n = g(hA)y_{n-1}$ an, mit einer rationalen Funktion $g(\cdot)$.

1. Zeigen Sie, dass für symmetrische Matrizen bzgl. der euklidischen Norm die Abschätzung

$$\|y_n\| \leq \max_{1\leq i\leq d} |g(h\lambda_i)|^n \|y_0\|$$

mit den Eigenwerten λ_i von A gilt. (Hinweis: Reell-symmetrische Matrizen besitzen ein Orthogonalsystem aus Eigenvektoren.)
Dabei darf verwendet werden, dass für reguläres $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt:

$$Qg(A)Q^{-1} = g(QAQ^{-1}).$$

2. Berechnen Sie mit (a) die maximale Schrittweite, für die das modifizierte Eulerverfahren angewendet auf das System

$$u'(t) = -10u(t) + 9v(t), \quad v'(t) = 9u(t) - 10v(t)$$

noch numerisch stabil integriert

5 Punkte

Übung 2 Stabilität Trapezregel/Mittelpunktsregel

Beweisen Sie, dass die Trapezregel und die Mittelpunktsregeln A-stabil sind. Genauer gilt sogar

$$\mathrm{SG} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$$

5 Punkte

Übung 3 Implizite Verfahren

Die 3-dimensionale, steife AWA

$$u' = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = (1, 0, -1)^T,$$

mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\}, \\ u_2(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\}, \\ u_3(t) &= -e^{-40t}\left\{\cos(40t) - \sin(40t)\right\}. \end{aligned}$$

1. Implementieren Sie für die implizite Trapezregel 2. Ordnung eine Löserklasse für dieses Problem. Verwenden Sie die in der *hdnum* Bibliothek bereitgestellten Methoden, um das auftretende LGS zu lösen. (siehe *hdnum/examples/lr.cc*).

2. Bestimmen Sie (experimentell) für die Trapezregel die größte (konstante) Schrittweite, welche eine Berechnung von $u(2) \in \mathbb{R}$ auf 10 Stellen genau erlaubt.

5 Punkte