Numerik, Wintersemester 2011
Dr. Olaf Ippisch
Rebecca Neumann
IWR, Universität Heidelberg

Blatt 7
Abgabe 9. 12. 2011 bis 9:00
INF 288, links neben HS 2

Übung 1 SDIRK Verfahren

1. Bestimmen Sie für das Alexander Verfahren, welches durch das Butcher Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & (1-\alpha) & \alpha \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array}$$

   gegeben ist, die Stabilitätsfunktion $\omega(h\lambda)$ zum Modellproblem $u'(t) = \lambda u(t)$ (erfüllt $y_{n+1} = \omega(h\lambda)y_n$).

2. Zeigen Sie, dass es für $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ das Modellproblem in zweiter Ordnung approximiert. Führen Sie hierzu einen Koeffizientenvergleich von $\omega(z)$ und e^z durch.

3. Zeigen Sie, dass das Verfahren für $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ A-stabil ist. (Hinweis: Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}^-$ anwenden)

4. Zeigen Sie, dass das Verfahren von Crouzieux mit dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

   A-stabil ist und das Modelproblem in dritter Ordnung approximiert.

6 Punkte

Übung 2 LMM Formen

Die Lösung $u(t)$ einer AWA erfülle

$$u(t_n) = u(t_{n-\sigma}) + \int_{t_{n-\sigma}}^{t_n} f(s, u(s))ds.$$

1. Beweisen Sie unter Verwendung des Interpolationspolynoms

$$p_m(t) = \sum_{\mu=0}^{m} f(t_{k-\mu}, u(t_{k-\mu}))L_{\mu,m}(t) \text{ mit } L_{\mu,m}(t) = \prod_{l=0,l\neq\mu}^{m} \frac{t-t_{k-l}}{t_{k-\mu}-t_{k-l}}$$

   die Beziehung

$$u(t_n) = u(t_{n-\sigma}) + \sum_{\mu=0}^{m} f(t_{k-\mu}, u(t_{k-\mu})) \int_{t_{n-\sigma}}^{t_n} L_{\mu,m}(s)ds + \mathcal{O}(h^{m+2}),$$

   welche die Grundlage der Adams-Formeln beschreibt. (Hinweis: Verwenden Sie die Interpolationsfehlerabschätzung aus Numerik 0)

2. Beweisen Sie die Beziehung

$$\sum_{\mu=0}^{m} L'_{\mu,m}(t_n)u(t_{k-\mu}) = f(t_n, u(t_n)) + \mathcal{O}(h^m),$$

   welche die Rückwärtsdifferenzenformeln begründet.

4 Punkte

Übung 3 Newton

Approximieren sie die Lösung der 2-dimensionalen AWA

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \sin(u_1(t))\sin(u_2(t)), \quad t \geq 0, \quad u_1(0) = 3, \\ u_2'(t) &= \sin(u_1(t))\sin(u_2(t)), \quad t \geq 0, \quad u_1(0) = 4, \end{aligned}$$

mit Hilfe der impliziten Trapezregel 2. Ordnung. Die Lösung konvergiert für $t \to \infty$ gegen einen konstanten Vektor, dessen Wert bestimmt werden soll.

Die in jedem Zeitschritt auftretenden nichtlinearen Gleichungssysteme sollen mit dem Newtonverfahren ohne Dämpfung gelöst werden. Für die resultierenden linearen Gleichungssystem kann wie auf Blatt 6 die LR-Zerlegung verwendet werden.

Achtung: Die *hdnum*-eigene Newton Klasse darf in dieser Aufgabe nicht verwendet werden!

6 Punkte