ÜBUNG 1 LMM KONVERGENZ

Untersuchen Sie, ob die folgende lineare Mehrschrittmethode konvergent ist:

$$y_n = y_{n-4} + \frac{1}{3}h(8f_{n-1} - 4f_{n-2} + 8f_{n-3}).$$

4 Punkte

ÜBUNG 2 LMM ORDNUNG

Bestimmen Sie die größte erzielbare Ordnung für eine LMM der Form

$$y_n + \alpha(y_{n-1} - y_{n-2}) - y_{n-3} = \frac{3+\alpha}{2}h(f_{n-1} + f_{n-2}).$$

Zeigen die, dass die LMM für $-3 < \alpha < 1$ nullstabil ist.

4 Punkte

ÜBUNG 3 LMM

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = -20u'(t) - 19u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -10,$$

soll das Adams-Moulton-Verfahren dritter Ordnung

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{12}h(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2})$$

verwendet werden. Formen Sie dazu die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um. Wie klein muss die Schrittweite h bemessen sein, damit in jedem Zeitschritt die Konvergenz der Fixpunktiteration zur Berechnung von y_n garantiert ist? *4 Punkte*

ÜBUNG 4 LMM (PRAKTISCHE AUFGABE)

Für das Modellproblem

$$u'(t) = -200tu(t)^2, \quad t \geq -3, \quad u(-3) = \frac{1}{901},$$

mit der Lösung $u(t) = (1 + 100t^2)^{-1}$ soll näherungsweise der Wert u(0)=1 berechnet werden. Implementieren Sie die Adams-Bashfort Methode vierter Ordnung

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{24}h\{55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}\},$$

und verwenden sie ein Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung zur Berechnung der Startwerte (zB *RungeKutta4* aus *hdnum*).

Führen Sie die Rechnungen für äquidistante Schrittweiten $h_i = 2^{-i}$, $i = 2, \ldots, 8$ durch und betrachten sie den Fehler an der Stelle $t = 0$.

Zum Vergleich soll dasselbe Problem komplett mit dem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung gerechnet werden. Wie verhält sich der Fehler an der Stelle $t = 0$ gegenüber der LMM? Vergleichen sie ausserdem die Anzahl der Funktionsauswertungen für die Adams-Bashfort Methode und das Runge-Kutta Verfahren. *4 Punkte*