Das Weihnachtsblatt ist freiwillig, die Punkte sind Bonuspunkte.

Bitte nutzen Sie die Gelegenheit sich daran zu versuchen, auch für unvollständige Lösungen werden Punkte vergeben (nur kompilieren sollte das Programm schon von alleine.)

Bei Fragen und Problemen schreiben Sie an René Heß (rene.hk-edv@gmx.de) oder Pavel Hron (pavel.hron@iwr.uni-heidelberg.de).

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

ÜBUNG 1 RENTIERE (PRAKTISCHE AUFGABE)

Der Weihnachtsmann züchtet am Nordpol Rentiere für seinen Schlitten. Die Anzahl der Rentiere zum Zeitpunkt t werde mit $u(t)$ bezeichnet, wobei t in Tagen gemessen werde. Zum Zeitpunkt t wächst die Herde normalerweise um $0.015u(t)$ Rentiere pro Tag. Jedoch bekommen beim Schlittenziehtraining mit den immer schwereren Geschenken regelmäßig einzelne Rentiere einen Herzinfarkt. Das Wachstum der Herde wird dadurch in jedem Zeitpunkt t gebremst und zwar um $3 \cdot 10^{-5}u(t)^2$ Exemplare pro Tag. Weil es eine Ehre ist für den Weihnachtsmann zu arbeiten wandern trotzdem pro Tag 0.3 Rentiere von weit her in das Nordpolgebiet. Zur Zeit $t_0 = 0$ (an Neujahr) zählt der Weihnachtsmann 100 Rentiere. Wird er an Weihnachten (Tag 358) genügend Rentiere für seinen Schlitten haben?

Hinweis: Stellen Sie zuerst die zugehörige Differentialgleichung auf. Lösen Sie dieses dann mit einem beliebigen Verfahren (Expliziter Euler, Runge Kutta, Prädiktor-Korrektor). *8 Punkte*

ÜBUNG 2 ARENSTORF-ORBIT (PRAKTISCHE AUFGABE)

In dieser Übung wird wieder das Problem des Arenstorf-Orbits gelöst (siehe Übungsblatt 4, praktische Übung). Wie wir schon überprüft haben, ist diese Aufgabe sehr anfällig gegenüber kleinen Störungen, Anfangsbedingungen und Fehlern. Der richtige Wert von μ_2, damit die Lösung periodisch ist, muss 0.012277471 sein. Das Programm zu diesem Übungsblatt finden Sie auf der Homepage.

Aufgaben:

1. Implementieren Sie die Adams-Bashfort Methode vierter Ordnung

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{24}h\{55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}\},$$

   und verwenden Sie ein Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung zur Berechnung der Startwerte (*RungeKutta4* aus *hdnum*).

2. Implizite lineare Mehrschrittverfahren werden i. Allg. als *Prädiktor-Korrektor-Verfahren* implementiert. Mit einem expliziten linearen Mehrschrittverfahren, dem sogenannten *Prädiktor*, wird zunächst ein Startvektor berechnet. Anschließend werden mit einem impliziten linearen Mehrschrittverfahren, dem sogenannten *Korrektor*, mittels Funktionaliteration Näherungen berechnet.

   Implementieren Sie eine *Prädiktor-Korrektor* Methode, die ein Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung als Startprozedur, einen 4. Ordnung Adams-Bashfort Schritt als Prädiktor und einen 4. Ordnung Adams-Moulton Schritt als Korrektor verwendet (PECE-Form):

$$
\begin{aligned}
y_n^\star &= y_{n-1} + \frac{1}{24} h\{55 f_{n-1} - 59 f_{n-2} + 37 f_{n-3} - 9 f_{n-4}\},\\
f_n^\star &= f(t_n, y_n^\star),\\
y_n &= y_{n-1} + \frac{1}{24} h\{9 f_n^\star + 19 f_{n-1} - 5 f_{n-2} + f_{n-3}\},\\
f_n &= f(t_n, y_n).
\end{aligned}
$$

3. Wenden Sie das Program mit beiden Methoden auf das Problem der Arenstorf-Orbits an und kontrollieren Sie die Richtigkeit der Implementierung mit einem Konvergenztest.

4. Führen Sie die Rechnungen für äquidistante Schrittweiten $h_i = 2^{-i}$, $i = 10, \ldots, 18$ durch und betrachten Sie den Fehler an der Stelle $t = T$. Zum Vergleich soll dasselbe Problem komplett mit dem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung gerechnet werden. Vergleichen Sie ausserdem die Anzahl der Funktionsauswertungen für diese Methoden und für das Runge-Kutta Verfahren. Stellen Sie die Die Fehler und Funktionsauswertungen für die einzelnen Methoden in einer Tabelle dar. Wie verhält sich der Fehler gegenüber der LMM und gegenüber PECE?

5. Bestimmen Sie experimentell die Konvergenzordnung dieser Verfahren.

6. Wenn das explizite Euler-Verfahren als Prädiktor benutzt würde, wäre die Konvergenzordnung auch niedriger. Was müsste man ändern, um mit dem expliziten Euler-Verfahren als Prädiktor und Adams-Moulton Schritt als Korrektor wieder 4. Ordnung bekommen zu können?

3+3+1+3+1+2 Punkte