Numerik, Wintersemester 2013
Prof. Dr. Peter Bastian
IWR, Universität Heidelberg

Aufgabenblatt 1
Abgabe 30. Oktober. 2013 bis 11:15

Allgemeine Hinweise:

- Bitte geben Sie möglichst in Gruppen von zwei bis drei Teilnehmer ab.
- Fur die Klausurzulassung sind 50% der Punkte und mindestens einmal Vorrechnen in der Übungsgruppe erforderlich.

ÜBUNG 1 LOGISTISCHES WACHSTUM

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} p(t_0) &= p_0 \\ \frac{d}{dt}p(t) &= ap(t) - bp(t)^2 \qquad (t > t_0,\ a, b > 0) \end{aligned}$$

wird unter anderen zur Beschreibung eines logistischen Wachstums der Population einer Spezies innerhalb eines geschlossenen Ökosystems verwendet. Dabei strebt die Population stets gegen den Gleichgewichtswert $p(t \to \infty) = \dfrac{a}{b} =: \xi$.

1. Zeigen Sie, dass das die Lösung des Anfangswertproblems dargestellt werden kann als
$$p(t) = \frac{a\,p_0}{b\,p_0 + (a - b\,p_0)\,e^{-a(t-t_0)}}.$$
2. Bestimmte Spezies (z.B. Ratten) entwickeln mit zunehmender Population eine hohe Anfälligkeit für Seuchen. Wir formulieren hierzu ein einfaches Modell:

   Zunächst sei $p(t_0) = p_0 < \xi$. Sobald die Population eine Schwelle Q ($p_0 < Q < \xi$) übersteigt, bricht eine Seuche aus. Die Populationsdynamik verändert sich und wird fortan durch die Beziehung
$$\frac{d}{dt}p(t) = Ap(t) - Bp(t)^2$$
   beschrieben, wobei $A < a, B < b$ und $\frac{A}{B} =: \zeta < \xi$ gilt. Daraufhin nimmt die Population wieder ab, bis eine Schwelle q ($\zeta < q < Q$) erreicht ist, bei der die Bevölkerung so gering ist, dass die Seuche sich nicht mehr ausbreiten kann. Nun wird die Populationsdynamik wieder durch die ursprüngliche Beziehung beschrieben.

   Dieses Modell erzwingt eine periodische Schwankung der Population. Berechnen Sie seine Periodendauer.
3. Bei vielen Spezies ist die Geburtenrate nicht proportional zur Populationsgröße. In vielen Fällen wird zur Fortpflanzung ein Partner benötigt, der nicht aktiv gesucht, sondern zufällig angetroffen wird. In vielen solchen Fällen kann die Geburtenrate b als proportional zu p^2 angenommen werden, während die Todesrate a nach wie vor proportional zu p ist. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung
$$\frac{d}{dt}\,p(t) = bp(t)^2 - ap(t)$$
   Unter welchen Umständen muss eine solche Spezies als gefährdet eingestuft werden?

5 Punkte

ÜBUNG 2 UMFORMUNG VON AWA

Formen Sie das Anfangwertproblem

$$u_1'' = t^2 - u_1' - u_2^2,$$
$$u_2'' = t - u_2' - u_1^3,$$
$$u_1(0) = 0,\ u_2(0) = 1,\ u_1'(0) = 1,\ u_2'(0) = 0$$

in ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung um. *2 Punkte*

ÜBUNG 3 EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT DER LÖSUNG

Für das Anfangswertproblem

$$u' = (1 + |u|)^{-1} \quad \text{auf } [a, b], \quad u(0) = u_0,$$

beweisen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. *3 Punkte*

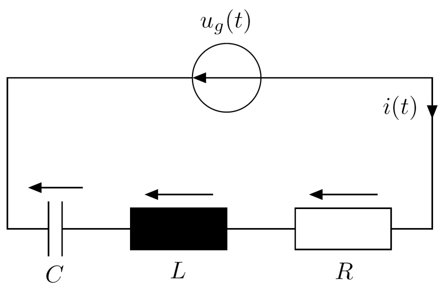
ÜBUNG 4 HDNUM UND GEDÄMPFTER REIHENSCHWINGKREIS (PROGRAMMIERAUFGABE - ABGABE IN 2 WOCHEN)

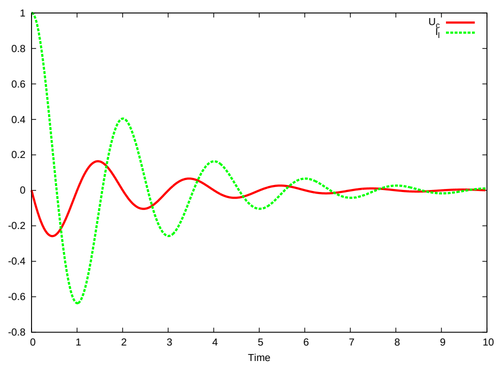
Hinweis:
René Heß gibt in erster Übungsgruppe (am 28.10) eine Einführung in die *hdnum* Bibliothek. Wer nicht teilnehmen kann, bitte eine Email an pavel.hron@iwr.uni-heidelberg.de schicken.

1. Laden sie sich die *hdnum* Bibliothek zusammen mit dem Tutorial von der Homepage. Lesen sie das Tutorial und installieren sie *hdnum* auf ihrem Computer. Kompilieren die die Beispielprogramme im examples Verzeichnis und machen sich mit der Struktur der Bibliothek bekannt.

   In den Dateien *modelproblem.hh* und *modelproblem.cc* ist eine Implementierung des exponentiellen Wachstumsgesetzes mit Hilfe des expliziten Euler Verfahrens. Setzen Sie den Parameter λ auf den Wert -1 und lassen Sie das Programm laufen.

2. Im folgenden soll ein Programm zur Simulation eines einfachen elektronischen Netzwerkes implementiert werden. Wir betrachten einen gedämpften Reihenschwingkreis:





   Die Beziehungen der einzelnen Bauelemente lauten:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= R i_R(t), \\ u_L(t) &= L \frac{d}{dt} i_L(t), \\ i_C(t) &= C \frac{d}{dt} u_C(t). \end{aligned}$$

   Durch eine Anwendung der Knoten- und Maschenregeln, kann hieraus die Beziehung

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_g(t)$$

   abgeleitet werden. Letztere beschreibt eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche durch die Wahl geeigneter Anfangsbedingungen $u_C(t_0)$ und $\frac{du_C}{dt}\big|_{t=t_0} =$

$\frac{i_L(t_0)}{C}$ sowie der äußeren Spannung $u_g(t)$ auf ein Anfangswertproblem festgelegt wird.

Durch einsetzen von $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_L}{C}$ erhält man ein System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_L(t) &= \frac{1}{L}(u_g - u_C - R i_L), \\ \frac{d}{dt} u_C(t) &= \frac{i_L}{C}. \end{aligned}$$

Dieses System wird durch die Wahl von $i_L(t_0)$ und $u_C(t_0)$ auf ein Anfangswertproblem festgelegt.

- Implementieren Sie ein C++ Programm mit der Hilfe von *hdnum*, welches dieses System mit dem expliziten Euler verfahren numerisch löst und eine (z.B. mit Gnuplot) visualisierbare Ausgabe von $u_C(t)$ und $i_L(t)$ erzeugt.
- Testen Sie ihr Programm für den Fall $u_g = 0$ und die Anfangsbedingungen $u_C(t_0) = 0$ sowie $i_L(t_0) = 1$. Setzen Sie die Kenngrößen $L = R = 1$, $C = 0.1$ und $\Delta t = 0.01$. Simulieren Sie den Zeitraum $t = 0 \ldots 10$.
- Visualisieren Sie die Lösung $u_c(t)$ und $i_L(t)$ im Intervall $[0, 10]$ mit Gnuplot (oder einem anderen Programm).

8 Punkte