

ÜBUNG 1 KREISRING

Zu lösen sei die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

in $\Omega = \{(x, y)^T \mid r_1 < \sqrt{x^2 + y^2} < r_2\}$ mit $0 < r_1 < r_2$ und

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_1 & \text{wenn } (x, y)^T \in \Gamma_1 &:= \{(x, y)^T \mid r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}\}, \\ u(x, y) &= u_2 & \text{wenn } (x, y)^T \in \Gamma_2 &:= \{(x, y)^T \mid r_2 = \sqrt{x^2 + y^2}\}. \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten hängt $\tilde{u}(r, \phi) = u(x, y)$ nicht vom Winkel ab. Damit reduziert sich das Problem auf

$$\partial_r^2 \tilde{u} + \frac{1}{r} \partial_r \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}(r_1) = u_1, \quad \tilde{u}(r_2) = u_2.$$

1. Verifizieren Sie, dass $\tilde{u}(r) = a \ln(r) + b$ eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung darstellt.
2. Bestimmen Sie die Konstanten a und b aus den Randbedingungen und zeigen Sie hierdurch, dass die spezielle Lösung durch

$$\tilde{u}(r) = \frac{u_1 - u_2}{\ln r_1 - \ln r_2} (\ln r - \ln r_1) + u_1$$

gegeben ist.

4 Punkte

ÜBUNG 2 TYPENEINTEILUNG

Bestimmen Sie den Typ (elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch) der folgenden partiellen DG 2. Ordnung in Abhängigkeit von x und y :

1. $x \partial_{xx} u + 2y \partial_{xy} u + y^2 \partial_{yy} u + \partial_x u - u = 0$
2. $\partial_{tt} u + (1 - x^2) \partial_{xx} u + (1 - y^2) \partial_{yy} u - xy \partial_x u = \sin(x\pi) \sin(y\pi)$

4 Punkte

ÜBUNG 3 RADIALSYMMETRISCHE HARMONISCHE FUNKTIONEN

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) eine harmonische und radialsymmetrische Funktion mit $u(x) = v(r(x))$. Hierbei ist $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der Abstand vom Ursprung $r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ und $\Gamma = r(\Omega)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r} \quad \forall r \in \Gamma,$$

falls $v'(r(x)) \neq 0 \forall x \in \Omega$.

4 Punkte

Die partielle Differentialgleichung

$$-\nabla(k(x)\nabla u(x)) = q(x) \quad \forall x \in \Omega$$

mit $k \in C^1(\bar{\Omega})$ beschreibt ein elliptisches Problem auf einem beschränkten, offenen Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$. In einem einfachen Diskretisierungs-Ansatz, werden die Ableitungen unter Anwendung eines Differenzen-Verfahrens diskretisiert. Hierzu definiert man für gegebenes $h \in \mathbb{R}^2$ die Punktmenge

$$\mathcal{T} = \{x := \sum_{j=1}^2 e_j h_j \alpha_j \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z} \wedge x \in \Omega\}.$$

Da die Anzahl der Gitterpunkte $N := |\mathcal{T}|$ endlich ist, existiert eine Folge $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ mit $\mathcal{T} = \{x_i \mid i = 1 \dots N\}$ und man löst die Gleichungen

$$\Gamma_i := - \sum_{j=1}^d \frac{1}{h_j^2} \left(k_{i,j}^+ (\tilde{u}(x_i + h_j) - \tilde{u}(x_i)) - k_{i,j}^- (\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_i - h_j)) \right) - q(x_i) = 0, \quad \forall i \in 1, \dots, N. \quad (1)$$

wobei

$$\begin{aligned} k_{i,j}^+ &:= \frac{1}{2}(k(x_i + h_j) + k(x_i)), \\ k_{i,j}^- &:= \frac{1}{2}(k(x_i) + k(x_i - h_j)), \end{aligned}$$

und \tilde{u} eine Gitterfunktion bezeichnet, welche nur in den Punkten von \mathcal{T} definiert ist. Mit $U \in \mathbb{R}^N$ und $(U)_i := \tilde{u}(x_i)$ können wir durch $(F(U))_i := \Gamma_i$ die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definieren und das diskrete Problem aus Gleichung (1) kann als

$$F(U) = 0 \quad (2)$$

geschrieben werden. Dieses lineare Gleichungssystem kann dann mit einem direkten Lösungsverfahren gelöst werden. In der Implementierung wird die LR-Zerlegung verwendet.

Die Datei `hdnum/src/pde.hh` enthält die Implementierung einer stationären Löserklasse, welche dazu gedacht ist, Gleichungen vom Typ 2 zu lösen. Eine Beispiel-Implementierung des zur Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ gehörenden Modellproblem findet man in `hdnum/examples/laplace.hh`. Eine kommentierte Beispielanwendung (das aus der Vorlesung bekannte Problem mit der einschneidenden Ecke) findet Sie in `hdnum/examples/ecke.cc`. Die dort geschriebenen Gnuplot Dateien, können Sie einfach durch den Befehl `gnuplot laplace.gp` betrachten. Zum genauen Verständnis des Codes kann auch ein Blick in die Datei `hdnum/src/sgrid.hh` hilfreich sein, in welcher eine Helfer-Klasse für das Gitter \mathcal{T} implementiert ist.

1. Machen Sie sich mit dem Beispiel in `hdnum/examples/ecke.cc` und der Implementierung in `hdnum/examples/laplace.hh` vertraut. Letztere erlaubt die Anwendung von Neumann sowie von Dirichlet Rändern. Gleichung 1 (mit $k(x) = 1$, $q(x) = 0$) wird dabei nur für Punkte innerhalb des Gitters verwendet und für Punkte auf dem Gitterrand modifiziert. Geben Sie analog die Gleichungen an, welche von der Implementierung (jeweils für Dirichlet bzw. Neumann Knoten) in diesen Punkten gelöst werden.
2. Implementieren Sie das Beispiel-Problem aus Aufgabe 1. Hierzu können Sie noch die Laplace-Modellklasse verwenden und müssen nur alternative Implementierungen der `DomainFunction` und der `BoundaryFunction` bereit stellen. Bestimmen Sie anhand der analytischen Lösungen die Konvergenzordnung des Verfahrens.

3. Implementieren Sie eine eigene Modellklasse, welche der Gleichung 1 bzw. 2 entspricht. Die Laplace-Modellklasse kann hier als Ausgangspunkt verwendet werden. Lösen Sie mit Hilfe dieser Implementierung das folgende Beispielproblem:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\},$$

$$k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \leq 1 \\ 100 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$q(x, y) = \begin{cases} 100 & \text{wenn } \|(x, y)^T - (1, 1)^T\|_2 \leq 0.15 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y)^T \in \partial\Omega \wedge x > 1, \quad \text{Dirichlet Rand}$$

$$k(x, y)\nabla u(x, y) = (3, 0)^T, \quad (x, y)^T \in \partial\Omega \wedge x \leq 1, \quad \text{Neumann Rand}$$

Überlegen Sie sich ein physikalisches System welches von diesem Beispiel beschrieben wird. Erklären Sie anhand dieses Problems, das Verhalten der Lösung qualitativ.

10 Punkte