ÜBUNG 1 LEMMA VON GRONWALL

Das Lemma von Gronwall lautet:
Für die stückweise stetige Funktion $w(t)$ gelte:

$$w(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds + b(t), \qquad t \geq t_0.$$

Hierbei sei $a(t) \geq 0$ eine integrierbare und $b(t) \geq 0$ eine monoton wachsende Funktion. Dann folgt

$$w(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) b(t), \qquad t \geq t_0.$$

Verwenden Sie diese Beziehung, um das folgende diskrete Analogon zu beweisen:
Seien $(w_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ Folgen nicht negativer Zahlen, mit $w_0 \leq b_0$ und

$$w_n \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu w_\nu + b_n, \qquad n \geq 1$$

dann gilt unter Annahme einer nicht fallenden Folge $(b_n)_{n\geq 0}$:

$$w_n \leq \exp(\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu) b_n, \qquad n \geq 1.$$

4 Punkte

ÜBUNG 2 LÖSBARKEITSEIGENSCHAFTEN

Untersuchen Sie mit Hilfe der Resultate aus der Vorlesung die Lösbarkeitseigenschaften (Existenz und Eindeutigkeit, globale Stabilität , Beschränkheit, exponentielle Stabilität) der folgenden AWA:

1. $u'(t) = u(t)^2, \qquad t \geq 0,\ u(0) = 1,$
2. $u'(t) = -u(t)^2, \qquad t \geq 0,\ u(0) = 1,$
3. $u'(t) = u(t)^{1/3}, \qquad t \geq 0,\ u(0) = 0,$
4. $u'(t) = \cos(u(t)) - 2u(t), \quad t \geq 0,\ u(0) = 1$

6 Punkte

Übung 3 Stabilität

Eine Anfangswertaufgabe $u'(t) = f(t,u)$ sei autonom ($f(t,u) = f(u)$), Lipschitz-stetig und die Lösung sei exponentiell stabil. Zeigen Sie, dass $u(t)$ dann gleichmäßig stetig ist.

2 Punkte

Übung 4 Nichthomogenne lineare Anfangswertaufgabe

Zeigen Sie, dass für die lineare AWA

$$y'(t) = ay(t) + b(t), \quad t \geq t_0, \qquad y(t_0) = y_0 \qquad t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und stetigem $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

eine Lösung gegeben ist.

2 Punkte

Übung 5 Lineare Anfangswertaufgaben

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass dann die global eindeutige Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des linearen Anfangswertproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad t \geq t_0, \qquad u(t_0) = u_0 \qquad t_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in \mathbb{R}^n$$

durch

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i e^{\alpha_i t}$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $\zeta_i \in \mathbb{R}^d$ dargestellt werden kann. Welche Bedeutung haben die Zahlen α_i und Vektoren $\zeta_i e^{\alpha_i t}$?

2. Bestimmen Sie die Lösung der AWA

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} u(t), \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$.

3. (Bonusaufgabe) Bestimmen Sie die Lösung der AWA

$$u'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} u(t), \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

4+3 Punkte