Übung 1 Numerische Integration mit Euler- und Heun-Verfahren

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \qquad a,b \in \mathbb{R}, \qquad u(a) = 0,$$

mit einer gegebenen hinreichend glatten Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun mit konstanter Schrittweite $h = (b-a)/N$ auf das AWA. Dann erhalten Sie eine Näherungsformel für das Integral $\int_a^b f(t)dt$. Geben Sie beide Näherungsformeln für das Integral sowie jeweils obere Schranken für den von der Zahl h abhängenden Integrationsfehler an.

4 Punkte

Übung 2 Konsistenzordnung

1. Geben Sie die Konsistenzordnung des Heun-Verfahrens:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{h}{2} f(t_n, y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

2. Zeigen Sie, dass das Nyström Einschrittverfahren mit

$$F(h; t, y_{n-1}) = \sum_{r=1}^{3} b_r k_r(h; t, y_{n-1})$$

und

$$\begin{array}{lll} k_1 := f(t, y_{n-1}), & k_2 := f(t + \frac{2}{3}h, y_{n-1} + \frac{2}{3}hk_1), & k_3 := f(t + \frac{2}{3}h, y_{n-1} + \frac{2}{3}k_2)) \\ b_1 = \frac{1}{4}, & b_2 = \frac{3}{8}, & b_3 = \frac{3}{8} \end{array}$$

die Konsistenzordnung drei besitzt.

5 Punkte

Übung 3 Rundungsfehler

Bei der Durchführung einer expliziten (L-stetigen) Einschrittmethode mit Lösung $u(t)$ für $t \geq t_0$ und numerischer Approximation durch eine Gitterfunktion $(\tilde{y}_n)_{n\geq 0}$, wird wegen des unvermeidbaren Rundungsfehlers eine gestörte Rekursion

$$\tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + h_n F(h_n; t_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) + \epsilon_n, \quad n \geq 1,$$

gelöst. Die "lokalen" Fehler verhalten sich dabei wie $\|\epsilon_n\| \propto \text{eps}\|\tilde{y}_n\|$, wobei eps den maximalen relativen Rundungsfehler bezeichnet. O.B.d.A. sei $\tilde{y}_o = u(t_0)$ angenommen. Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|\tilde{y}_n - u(t_n)\| \leq K(t_n) \left(\max_{1\leq m\leq n} \|\tau_m\| + \text{eps} \max_{1\leq m\leq n} h_m^{-1} \|\tilde{y}_m\| \right).$$

4 Punkte

Übung 4 Vergleich verschiedener Zeitschrittverfahren (Programmieraufgabe)

Betrachten Sie die AWA

$$\begin{aligned} u'(t) &= -200t\, u(t)^2, \qquad (-2 \leq t \leq 2) \\ u(-2) &= \frac{1}{401} \end{aligned}$$

1. Implementieren Sie ein Runge-Kutta-Nyström Verfahren 3. Ordnung (siehe Übung 2) analog zum Beispiel *explixiteuler.hh* in *hdnum*. Verifizieren Sie für konstante Schrittweiten $h = 2^{-i}$, $i = 3, \ldots, 8$ die Konvergenz 3. Ordnung dieses Verfahrens (Exakte Lösung $u(t) = \frac{1}{1+100t^2}$).

2. Betrachten Sie ausserdem die Konvergenzordnung des Expliziten Euler Verfahrens zu denselben Schrittweiten.

3. Die Aussage des Satzes von Aufgabe 3 impliziert im Falle konstanter Schrittweiten eine untere Schranke für die Schrittweite bei deren Unterschreiten der Approximationsfehler aufgrund des wachsenden Rundungsfehlers wieder zunimmt. Ersetzen Sie in ihren Programmen `double` durch `float` und bestimmen Sie diese Schranke näherungsweise.

Konvergenzordnung: In vielen Fällen kann die Konvergenzordnung eines Grenzprozesses

$$a(h) \to a(h \to 0), \quad \|a(h) - a\| = O(h^\alpha),$$

nur experimentell bestimmt werden. Dazu werden bei bekanntem Limes a *für zwei Werte* h *und* $h/2$ *die Fehler* $\|a(h) - a\|$ *und* $\|a(h/2) - a\|$ *berechnet und dann die Ordnung* α *über den formalen Ansatz* $\|a(h) - a\| = ch^\alpha$ *aus der folgenden Formel ermittelt:*

$$\alpha = \frac{1}{\log(2)} \log \left(\frac{\|a(h) - a\|}{\|a(h/2) - a\|} \right)$$

5 Punkte