Übung 1 Konvergenz des impliziten Euler Verfahren für lineare AWA

Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ negativ definit mit Eigenwerten $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \cdots < \lambda_1 < 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten den impliziten Euler Verfahren zur Lösung der linearen AWA

$$u'(t) = Au(t) + b \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^n.$$

1. Finden Sie die Lipschitz-konstante $\tilde{L}$ aus dem Satz 3.4 (Konvergenz allgemeiner Einschrittverfahren) für dieses Problem.
2. Berechnen Sie die Spektralnorm von $\|(I - hA)\|$ und $\|(I - hA)^{-1}\|$.
3. Gibt es eine Schrittweitebedingung für unsere Problem?

3 Punkte

Übung 2 A priori Fehlerabschätzung für implizit Euler

Betrachten Sie das implizite Euler-Schema

$$y_n = y_{n-1} + h_n f(t_n, y_n), \quad t_n \geq t_0, \quad y_0 \approx u_0,$$

zur Diskretisierung der üblichen L-stetigen AWA $u'(t) = f(t, u(t))$, $t \geq t_0$, $u(t_0) = u_0$. Beweisen Sie unter der Annahme einer geeigneten Schrittweitenbedingung die *a priori* Fehlerabschätzung (mit einem geigneten $\gamma > 0$)

$$\|y_n - u(t_n)\| \leq e^{\gamma L(t_n - t_0)}\{\|y_0 - u_0\| + \frac{1}{2}(t_n - t_0) \max_{1\leq m\leq n} h_m \max_{t\in[t_{m-1},t_m]} \|u''(t)\|\}.$$

5 Punkte

Übung 3 hp - Verfeinerung

Für eine gegebene AWA gebe es Einschrittverfahren mit Lipschitz-stetigen Verfahrensfunktionen $F_p(h_i, t_k, y_k, y_{k-1})$ der Ordnung p und $h_i = 2^{-i}$. Wir nehmen an, die damit berechneten Approximationen $Y_{p,i}$ der exakten Lösung $u(T)$ zum Zeitpunkt T genügen

$$\|e_{p,i}\| := \|Y_{p,i} - u(T)\| = K\,T\,h_i^p + \mathcal{O}(h_i^{p+1}).$$

Hierbei sei die Konstante $K \in \mathbb{R}$ unabhängig von der Wahl von p, i.

Eine Lösung $Y_{p,i}$ sei berechnet, aber ihre Genauigkeit unbefriedigend. Die Kosten der Berechnung seien gegeben durch

$$r(i, p) = 2^i \cdot m(p)$$

mit einer monoton wachsenden Funktion m. Diskutieren Sie unter welchen Voraussetzungen an i, p und m die Berechnung von $Y_{p+1,i}$ viel versprechender ist als die Berechnung von $Y_{p,i+1}$.

2 Punkte

ÜBUNG 4 AUTONOMISIERUNG

Unter Autonomisierung einer AWA versteht man das Lösen des erweiterten Systems

$$\tilde{y}' = \tilde{f}(\tilde{y}) \text{ mit } \tilde{y} = \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}, \tilde{f}(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,y) \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{y}(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

welches offensichtlich äquivalent ist zum Problem

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Ein Einschrittverfahren heißt invariant gegen Autonomisierung, wenn die zu f bzw. $\tilde{f}$ gehörenden Verfahrensfunktionen F bzw. $\tilde{F}$ dieselben Ergebnisse produzieren, also

$$\tilde{F}(h,\tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ F(t,y,h) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass ein explizites Runge-Kutta Verfahren der Stufe R genau dann invariant gegen Autonomisierung ist, wenn gilt

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad (1 \le i \le R).$$

3 Punkte

ÜBUNG 5 ARENSTORF-ORBIT (PROGRAMMIERAUFGABE, ABGABE 27.11)

Der Arenstorf-Orbit beschreibt geschlossene Trajektorien eines Satellits rund um die Erde und den Mond. In einem restringierten Koordinatensystem ist dieses 3-Körper Problem für die x und y Koordinaten des Sateliten gegeben durch

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - \mu_1 \frac{x+\mu_2}{N_1} - \mu_2 \frac{x-\mu_1}{N_2}, \\ y'' &= y - 2x' - \mu_1 \frac{y}{N_1} - \mu_2 \frac{y}{N_2}, \end{aligned}$$

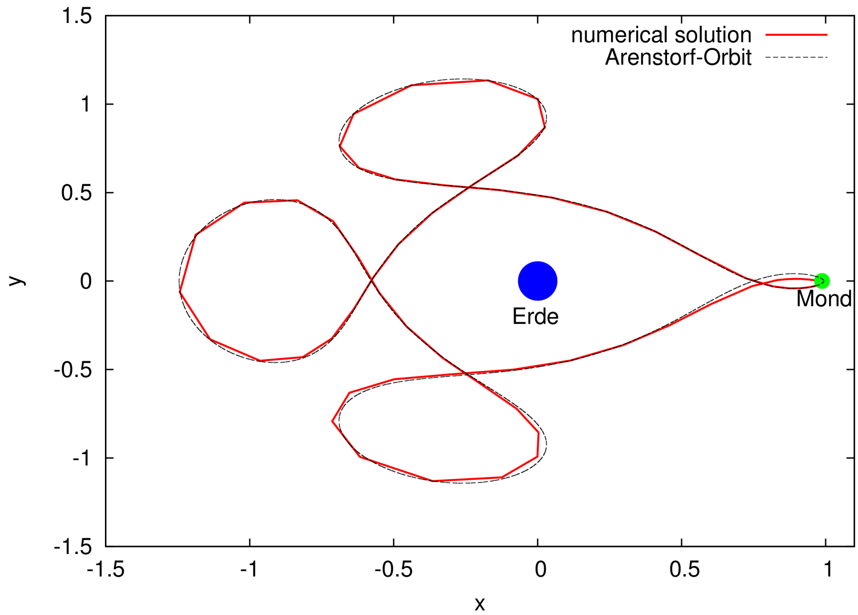
wobei N_1 und N_2 definiert sind durch

$$N_1 = \left((x+\mu_2)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad N_2 = \left((x-\mu_1)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

und $\mu_2 = 1 - \mu_1$. Der Mond befindet sich dabei im Punkt $(\mu_1, 0)$, die Erde im Punkt $(-\mu_2, 0)$. Mit den Anfangswerten

$$x(0) = 0.994, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 0$$
$$y'(0) = -2.0015851063790825$$

und für $\mu_2 = 1/81.45$ hat das System eine periodische Lösung mit der Periode $T = 17.06521656015796$. Die Berechnung solcher Arenstorf-Orbits ist sehr sensitiv gegenüber kleinen Störungen, deswegen sind sie beliebte Testbeispiele für die Genauigkeit numerischer Methoden.



Implementierung

1. Implementieren Sie eine Modelklasse $ArenstorfOrbit$ für *HDnum*, als Beispiel kann das Modelproblem *NBody examples/nbody.hh* dienen.

2. Wenden Sie das klassische explizite Runge-Kutta Verfahren der 4. Ordnung (im *HDnum* heißt das Verfahren *RungeKutta4*) auf das Arenstorf-Orbit Problem an. Wählen Sie einen festen Zeitschritt h, so dass die $\|\cdot\|_2$ des Fehlers in $t = T$ kleiner als $2.42 \cdot 10^{-8}$ ist. Die letzte Schrittweite soll so bestimmt werden, dass $t = T$ erreicht wird. Wie klein muss man h wählen? Wie oft wertet das Program die rechte Seite f aus?

Schrittweitensteuerung

In der Vorlesung wurden zwei Algorithmen für die Schrittweitensteuerung vorgestellt - eigebettete Verfahren und Verfahren mit Richardson-Extrapolation. Die Runge-Kutta-Fehlberg (RKF) sind besonders gut geeignet für Schrittweitensteuerung. Sie bestehen aus zwei RK Verfahren mit s Stufen, eines der Ordnung m und eines der Ordnung $m+1$, wobei die s Stufen für beide Verfahren identisch sind. Damit spart man bei der Fehlerabschätzung viele Operationen in Vergleich zu zwei allgemeinen RK Verfahren.

3. Die *RKF45* Klasse ist schon in *HDnum* implementiert, siehe *src/ode.hh*. Mit Hilfe von dieser Klasse implementieren Sie das dreistufige RKF23 Verfahren

$$\begin{array}{r|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline m=2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline m=3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

4. Das Richardson-Extrapolation Verfahren ist in *HDnum* auch implementiert (Klasse *RE*). Kombinieren Sie dieses Verfahren mit *Heun2*.

5. Wenden Sie das Program (mit *RKF23* und *RE/Heun2*) auf das Problem der Arenstorf-Orbits an. Wie klein muss TOL gewählt werden, das der Fehler kleiner als $2.42 \cdot 10^{-8}$ ist? Vergleichen Sie die Anzahl der Auswertungen von f mit dem *RungeKutta4* Verfahren.

6. Mit der Klasse *Timer* kann man die Laufzeit des Programms messen. Vergleichen Sie die Rechenzeit die für alle drei Algorithmen benötigt wird, um diesselbe Genauigkeit zu erreichen. Begründen Sie ihre die Beobachtung.

3+3+3+1+2+2=14 Punkte