ÜBUNG 1 HARMONISCHER OSZILLATOR

Der Dynamik eines harmonischen Oszillators entspricht die AWA

$$u''(t) = -\omega^2 u(t), \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}, \quad u'(t_0) = \tilde{u_0} \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

1. Stellen Sie das äquivalente System erster Ordnung auf.
2. Zeigen Sie, das dieses Problem durch

$$q'(t) = -\omega i q(t), \qquad q(t_0) = q_0 \in \mathbb{C},\ \omega \in \mathbb{R}$$

   auch als eine komplexwertige skalare AWA formuliert werden kann.
3. Überprüfen Sie, ob das explizite Euler Verfahren für dieses Problem absolut stabil ist, also die damit berechneten Näherungswerte y_n von $u(t_n)$ für eine Schrittweite $h > 0$ die Bedingung

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < \infty$$

   erfüllen.

3 Punkte

ÜBUNG 2 SCHRITTWEITENKONTROLLE

Rekapitulieren Sie die Richardson Extrapolation von $\tau^m(t_n)$ aus der Vorlesung und beantworten Sie folgende Fragen:

1. Wie lautet die Abschätzung, wenn statt einer Schrittweitenhalbierung eine Schrittweitenviertelung vorgenommen wird?
2. Ist diese Methode auch für implizite Einschrittverfahren

$$y_n = y_{n-1} + h_n F(h_n, t_{n-1}, y_{n-1}, y_n)$$

   mit L-stetiger Verfahrensfunktion F anwendbar?

5 Punkte

ÜBUNG 3 GLOBALE KONVERGENZ

Zeigen Sie die globale Konvergenz des expliziten Euler-Verfahrens, $y_n = y_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, y_{n-1})$, $n \geq 1$, $y_0 = u_0$ für global L-stetige und **strikt monotone** AWAn unter der Schrittweitenbedingung

$$h = \sup_{n\geq 1} h_n < \frac{2\lambda}{L^2}.$$

Leiten Sie hierfür die globale Fehlerabschätzung

$$||y_n - u(t_n)|| \leq c \max_{1\leq\nu\leq n} \left(h_\nu \max_{I_\nu} ||u''|| \right), \quad t_n \geq t_0.$$

her.

Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Nutzen Sie die Youngsche Ungleichung in der Form $2ab \leq \epsilon^{-1}a^2 + \epsilon b^2$ und die Beziehung $2||e_n||^2 - 2(e_{n-1}, e_n) = ||e_n||^2 + ||e_n - e_{n-1}||^2 - ||e_{n-1}||^2$ um folgende Abschätzung zu beweisen:
$$(1 - h_n\alpha)||e_n||^2 \leq (1 - h_n\kappa)||e_{n-1}||^2 + \frac{h_n}{\alpha}||\tau_n||^2 \quad \forall\alpha > 0.$$
mit $\kappa = 2\lambda - hL^2$.
2. Beweisen Sie damit induktiv
$$||e_n||^2 \leq \frac{8}{\kappa^2} \max_{1\leq\nu\leq n} ||\tau_\nu||^2$$
3. Verwenden Sie die Abschätzung des Abschneidefehlers für das explizite Euler Verfahren aus der Vorlesung.

Hinweis: Wenn Sie bei einzelnen Teilschritten nicht weiter kommen, benutzen Sie die angegeben Ergebnisse um weiterzurechnen.

6 Punkte