
ÜBUNG 1 IMAGINÄRES STABILITÄTSINTERVALL

Bestimmen Sie das rein imaginäre Stabilitätsintervall (der Schnitt der imaginären Achse mit dem Stabilitätsgebiet)

$$\{ \; iz \in \mathbb{C} \quad | \quad z \in \mathbb{R}, \; |w(z)| \leq 1 \; \}$$

für die Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 1 bis 3. *3 Punkte*

ÜBUNG 2 STABILITÄTSINTERVALLE KONKRETER EINSCHRITTVERFAHREN

Geben Sie die Stabilitätsintervalle der folgenden Einschrittverfahren an:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h\left(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right), \\
\text{b)} \quad y_{n+1} &= y_n + hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)), \\
\text{c)} \quad y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h\left(2f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 4f(t_n, y_n) + hf^{(1)}(t_n, y_n)\right), \qquad f^{(1)} = f'_t + ff'_x.
\end{aligned}$$

5 Punkte

ÜBUNG 3 STABILITÄT DIFFERENTIALGLEICHUNG 2TER ORDNUNG

Aus einer skalaren Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

mit einer differenzierbaren Funktion $f(x, y, z)$ gewinnt man durch Einführung der Hilfsfunktionen $u_1 := u$, $u_2 := u'$ ein System von Gleichungen 1ter Ordnung. Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix dessen rechter Seite im Falle $\partial_x f \geq 0$ nur reelle Eigenwerte hat. *4 Punkte*

ÜBUNG 4 SIMULATION STEIFER SYSTEME

Die 3-dimensionale, steife AWA

$$u' = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = (1, 0, -1)^T,$$

mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\}, \\
u_2(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\}, \\
u_3(t) &= -e^{-40t}\left\{\cos(40t) - \sin(40t)\right\}.
\end{aligned}$$

1. Implementieren Sie eine Modell-Klasse für dieses Problem.
2. Bestimmen Sie (experimentell) die (konstante) Schrittweite, für welche das klassische Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung gerade noch stabil ist. Dieses Verfahren ist unter dem Namen *RungeKutta4* bereits in *HDNum* implementiert.

3. Implementieren Sie für die implizite Trapezregel 2. Ordnung eine Löser-Klasse zur Anwendung auf *lineare* AWA. Verwenden Sie die in der *HDNum* Bibliothek bereit gestellten Methoden, um das auftretende LGS zu lösen (vergleiche Beispiel-Datei *hdnum/examples/lr.cc*).

4. Bestimmen Sie (experimentell) für das klassische Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung sowie die implizite Trapezregel 2. Ordnung die größte (konstante) Schrittweite, welche eine Berechnung von $u(2) \in \mathbb{R}$ auf 10 Stellen genau erlaubt. Vergleichen Sie die jeweils benötigte Rechenzeit.

6 Punkte