Numerik, Wintersemester 2013 **Aufgabenblatt 7**
Prof. Dr. Peter Bastian Abgabe 11. Dezember 2013 bis 11:15
IWR, Universität Heidelberg

ÜBUNG 1 θ-SCHEMA
Das elementare θ Schema entspricht dem Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|c} \theta & \theta \\ \hline & 1 \end{array}.$$

1. Zeigen Sie, dass dieses Verfahren äquivalent ist zu einer Vorschrift
$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \theta h, y_n + \theta(y_{n+1} - y_n)).$$
2. Für welche Werte von θ ist das Verfahren A-stabil. Für welche Werte ist es L-Stabil.

3 Punkte

ÜBUNG 2 SDIRK VERFAHREN

1. Bestimmen Sie für das Alexander Verfahren, welches durch das Butcher Tableau
$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & (1-\alpha) & \alpha \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array}$$
gegeben ist, die Stabilitätsfunktion $\omega(h\lambda)$ zum Modellproblem $u'(t) = \lambda u(t)$ (erfüllt $y_{n+1} = \omega(h\lambda)y_n$).
2. Zeigen Sie, dass es für $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ das Modellproblem in zweiter Ordnung approximiert. Führen Sie hierzu einen Koeffizientenvergleich von $\omega(z)$ und e^z durch.
3. Zeigen Sie, dass das Verfahren für $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ A-stabil ist. (Hinweis: Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}^-$ anwenden)
4. **Zusatzaufgabe**: Zeigen Sie, dass das Verfahren von Crouzieux mit dem Butcher-Tableau
$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$
A-stabil ist und das Modelproblem in dritter Ordnung approximiert. Die Ordnung eines s-stufigen impliziten Runge Kutta Verfahrens kann also höher als s sein.

4+(2) Punkte

ÜBUNG 3 STABILITÄT EINER LINEAREN AWA
Jede der in der Vorlesung betrachteten Einschrittmethoden nimmt angewendet auf ein lineares (autonomes) System $u'(t) = Au(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Form $y_n = g(hA)y_{n-1}$ an, mit einer *rationalen* Funktion $g(\cdot)$.

1. Zeigen Sie, dass für $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und reguläres $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt:
$$g(QBQ^{-1}) = Qg(B)Q^{-1}$$

2. Für den Fall, dass die Matrix symmetrisch ist, zeigen Sie bzgl. der euklidischen Norm die Abschätzung
$$\|y_n\| \le \max_{1\le i\le d} |g(h\lambda_i)|^n \|y_0\|$$
mit den Eigenwerten λ_i von A. (Hinweis: Reell-symmetrische Matrizen besitzen ein Orthogonalsystem aus Eigenvektoren.)

3. Bei örtlicher Diskretisierung der (1-dimensionalen) Wärmeleitungsgleichung
$$\partial_t v(x,t) = \partial_{xx} v(x,t), \quad v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x)$$
mittels der zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung entsteht ein System von $d = \frac{1}{\Delta x} - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in den Unbekannten $u_i(t) \approx v(x_i, t)$:
$$u_i'(t) = \frac{1}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)\right], \quad i = 1,\dots,d \; (u_0 = u_{d+1} = 0).$$
Die zugehörige Koeffizientenmatrix
$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
hat die Eigenwerte
$$\lambda_j = -\left(\frac{\sin(j\pi\Delta x/2)}{\Delta x/2}\right)^2, \quad j = 1\dots d.$$
Bestimmen Sie die maximale Schrittweite h_{max} für welche das explizite Euler Verfahren das System noch stabil integriert.

5 Punkte

ÜBUNG 4 DIRK VERFAHREN

Zur Lösung der folgenden Aufgaben darf die generische Klasse `DIRK` verwendet werden, welche in der *HDNum* Bibliothek in der Datei *hdnum/src/ode.hh* implementiert ist. Eine Beispielanwendung auf den Van-der-Pol Oszillator ist in *hdnum/examples/vanderpol.cc* gegeben.

Der Van-der-Pol Oszillator ist ein klassisches Beispiel für steife AWA. In den Koordinaten von Liénhart:
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) & y_1(0) &= 1 \\ y_2'(t) &= \tfrac{1}{\epsilon}(y_1(t) - y_2(t)^3/3 + y_2(t)) & y_2(0) &= 2. \end{aligned}$$
Für $\epsilon = 10^{-3}$ zeigt er ein periodisches Verhalten mit äußerst scharfen Umkehrpunkten. Eine Implementierung dieses Modells finden Sie ebenfalls in *hdnum/examples/vanderpol.cc*.

1. Berechnen Sie $y_1(10)$ und $y_2(10)$ mit dem (impliziten) Alexander Verfahren und dem (expliziten) Verfahren von Heun. Verwenden Sie Schrittweiten $h = 10^{-1}$ bis $h = 10^{-4}$ und visualisieren sie die Lösungen. Hierfür finden Sie ein gnuplot Skript auf der homepage.

2. Lösen und visualisieren Sie das Problem außerdem mit dem adaptiven Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren, welches in der Löser-Klasse *RKF45* implementiert ist. Wählen Sie hier Werte $TOL = 10^{-1}$ bis $TOL = 10^{-4}$.

3. Beschreiben und Interpretieren Sie Ihre Beobachtungen und geben Sie diese in einer separaten Datei mit ab.

5 Punkte