ÜBUNG 1 KOLLOKATION
In dieser Übung sollen Sie ein Runge-Kutta-Verfahren durch Kollokation erzeugen.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten des impliziten Runge-Kutta-Verfahrens, dass durch Kollokation mit den Stützstellen der Simpsonregel erstellt wird.

   Simpsonregel: $Q(f) = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

b) Welche Konsistenzordnung hat dieses Verfahren?

4 Punkte

ÜBUNG 2 KOLLOKATION
Zeigen Sie, dass die Koeffizienten eines durch Kollokation definierten impliziten Runge-Kutta-Verfahrens folgende Beziehungen erfüllen:

a)

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \ldots, s$$

b)

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, \quad i, k = 1, \ldots, s$$

Anmerkung: Für $k = 1$ folgt damit insbesondere die Konsistenz und die Invarianz unter Autonomisierung (vgl. Übung 4/Aufgabe 4). *3 Punkte*

ÜBUNG 3 KONTRAKTION IN DER NEWTON-ITERATION
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für genügend kleine Schrittweiten h_n für das implizite Euler-Verfahren auch das Newton-Verfahren konvergiert. Leider wurde der Beweis nicht ganz korrekt gemacht. In dieser Aufgabe sollen Sie den Beweis wasserglatt beweisen.

a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, regulär. Zuerst zeigen Sie die Ungleichung

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|B^{-1}\| \|A - B\|.$$

b) Für die Newton-Iteration gilt

$$y_n^{(k+1)} = -\left(J^{(k)}\left(y_n^{(k)}\right)\right)^{-1} y_{n-1} - \left(J^{(k)} y_n^{(k)}\right)^{-1} \left(h_n f\left(t_n, y_n^{(k)}\right) - h_n f_x\left(t_n, y_n^{(k)}\right) y_n^{(k)}\right) = g\left(y_n^{(k)}\right).$$

   Benutzen Sie das Ergebnis aus a) um folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\|g\left(y_n^{(k)}\right) - g\left(\tilde{y}_n^{(k)}\right)\| \leq K\, h_n \|y_n^{(k)} - \tilde{y}_n^{(k)}\|,$$

   wobei K eine Konstante ist. Der Beweis muss technisch korrekt sein!

4 Punkte

ÜBUNG 4 BDF 2

Die Koeffizienten der impliziten Rückwärtsdifferenzenformeln

$$\sum_{\mu=0}^{m} L'_{\mu,m}(t_n) y_{n-\mu} = f_n$$

ergeben sich direkt aus den Ableitungen der Lagrange-Polynome

$$L_{\mu,m}(t) = \prod_{l=0, l\neq\mu}^{m} \frac{t - t_{k-l}}{t_{k-\mu} - t_{k-l}}.$$

Geben Sie im Fall $m = 2$ die Koeffizienten in Abhängigkeit der beliebigen Schrittweiten $h_n = t_n - t_{n-1}$ und $h_{n-1} = t_{n-1} - t_{n-2}$ an. *4 Punkte*

ÜBUNG 5 LMM FORMEN

Die Lösung $u(t)$ einer AWA erfülle

$$u(t_n) = u(t_{n-\sigma}) + \int_{t_{n-\sigma}}^{t_n} f(s, u(s)) ds.$$

a) Beweisen Sie unter Verwendung des Interpolationspolynoms

$$p_m(t) = \sum_{\mu=0}^{m} f(t_{k-\mu}, u(t_{k-\mu})) L_{\mu,m}(t) \;\text{ mit }\; L_{\mu,m}(t) = \prod_{l=0, l\neq\mu}^{m} \frac{t - t_{k-l}}{t_{k-\mu} - t_{k-l}}$$

die Beziehung

$$u(t_n) = u(t_{n-\sigma}) + \sum_{\mu=0}^{m} f(t_{k-\mu}, u(t_{k-\mu})) \int_{t_{n-\sigma}}^{t_n} L_{\mu,m}(s) ds + \mathcal{O}(h^{m+2}),$$

welche die Grundlage der Adams-Formeln beschreibt. (Hinweis: Verwenden Sie die Interpolationsfehlerabschätzung aus Numerik 0.)

b) Beweisen Sie die Beziehung

$$\sum_{\mu=0}^{m} L'_{\mu,m}(t_n) u(t_{k-\mu}) = f(t_n, u(t_n)) + \mathcal{O}(h^m),$$

welche die Rückwärtsdifferenzenformeln begründet.

4 Punkte