ÜBUNG 1 LMM STABILITÄTSINTERVALLE

Bestimmen Sie die Stabilitätsintervalle (und -gebiete) der folgenden beiden expliziten Mehrschrittformeln:

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-2} &= 2hf_{n-1} \\ y_n - y_{n-2} &= \frac{1}{2}h(f_{n-1} + 3f_{n-2}). \end{aligned}$$

Bemerkung: Es genügt die Untersuchung der Stabilität in der Umgebung des Ursprungs, d.h. für kleine h.

5 Punkte

ÜBUNG 2 LMM KONVERGENZ

Untersuchen Sie, ob die folgende lineare Mehrschrittmethode konvergent ist:

$$y_n = y_{n-4} + \frac{1}{3}h(8f_{n-1} - 4f_{n-2} + 8f_{n-3}).$$

5 Punkte

ÜBUNG 3 LÖSUNGEN EINER LINEARER RANDWERTAUFGABE

Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen Randwertaufgabe erster Ordnung

$$u'(t) + 9\,u(t) = 0.$$

Für welche Werte von $\alpha \in (0, \frac{2}{3}\pi]$ und $\beta \in \mathbb{R}$ hat diese Aufgabe mit Randbedingungen

$$u'(0) = 5, u(\alpha) = \beta$$

a) genau eine,

b) keine,

c) unendlich viele Lösungen?

4 Punkte

ÜBUNG 4 LEAPFROG VERFAHREN

In der Vorlesung wurde auch das Leapfrog-Verfahren besprochen. Diese Methode ist gut geeignet für allgemeine Probleme von konservativen Systemen der klassischen Dynamik in der Form

$$\frac{d^2\,x}{d\,t^2} = \frac{d\,v}{d\,t} = a(x),$$

die z.B. die Bewegung mehrerer Objekte in einem Potentialfeld beschreiben.

Das Leapfrog-Verfahren berechnet abwechselnd die Positionen x und die Geschwindigkeiten v zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Ein Schritt in der Methode lautet:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + v_{i+\frac{1}{2}}\Delta t, \\ v_{i+\frac{1}{2}} &= v_{i-\frac{1}{2}} + a(x_i)\Delta t \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie, dass diese Methode invariant gegenüber Zeitumkehr ist.

b) Zeigen Sie, dass man diese Methode auch als 2 Einschritt-Verfahren darstellen kann:

$$\begin{aligned} v_{i+\frac{1}{2}} &= v_i + a(x_i)\frac{\Delta t}{2} \\ x_{i+\frac{1}{2}} &= x_i + v_{i+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_{i+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{2} \\ v_{i+1} &= v_{i+\frac{1}{2}} + a(x_{i+1})\frac{\Delta t}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

c) Betrachten Sie die skalare Gleichung $\frac{d^2 x}{d t^2} = -g$. Zeigen Sie, dass die Energie $E = \frac{1}{2}v^2 + gx$ mit dem Leapfrog Verfahren nicht nur beschränkst, sonder auch erhalten bleibt.

6 Punkte