ÜBUNG 1 CROUZEIX-RAVIART A-POSTERIORI FEHLER

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand und $\{\mathcal{T}_h\}_h$ eine Folge konformer und regulärer Simplex-Triangulierungen mit größter Kantenlänge h. Die Menge der Kanten in einem $\mathcal{T}_h$ seien mit $\mathcal{F}_h$ bezeichnet. Für gegebenes $\mathcal{T}_h$ seien die Räume

$$P^1_{c,0} = \{v_h \in C^0(\Omega), \quad v_h\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall t \in \mathcal{T}_h : v_h\big|_t \in \mathbb{P}^1\}$$

und

$$P^1_{pt,0} = \{v_h \in L^1(\Omega), \quad \forall t \in \mathcal{T}_h : v_h\big|_t \in \mathbb{P}^1, \quad \forall e \in \mathcal{F}_h : \int_e [\![v_h]\!]_e = 0\},$$

wobei $[\![f]\!]_e$ den Sprung einer Funktion f auf der Kante e bezeichnet (was im Falle von $e \subset \partial\Omega$ als $f\big|_e = 0$ interpretiert wird). Von beiden Räumen ist nur $P^1_{c,0}$ in $H^1_0(\Omega)$ enthalten.

Für $V_h := H^1_0(\Omega) + P^1_{pt,0}$ sei die Bilinearform $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ durch

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{t \in \mathcal{T}_h} \int_t \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx$$

gegeben und eine Norm:

$$|v_h|_{V_h} := \sqrt{a_h(v_h, v_h)}.$$

Im Übrigen gilt die erweiterte Poincaré Ungleichung:

$$\forall v_h \in V_h : c\|v_h\|_{0,\Omega} \leqslant |v_h|_{V_h}, \qquad (c \text{ hängt nur von } \Omega \text{ ab}).$$

Die Funktionen $u \in H^1_0(\Omega)$ und $u_h \in V_h$ erfüllen jeweils

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

und

$$\forall v_h \in V_h : \sum_{t \in \mathcal{T}_h} \int_t \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_\Omega f v_h dx.$$

Zeigen Sie die a-posteriori Fehler-Abschätzung:

$$|u - u_h|_{V_h} \leqslant c(\sum_{t \in \mathcal{T}_h} e_t(u_h, f)^2)^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_h \in P^1_{c,0}} |u_h - v_h|_{V_h},$$

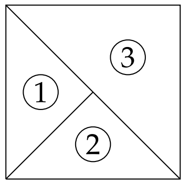
wobei c unabhängig von h seien soll und außerdem: (h_e bzw. h_t bezeichnen jeweils die Länge von e bzw. die längste Kante in t)

$$e_t(u_h, f) = h_t \|f + \Delta u_h\|_{0,t} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial t} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\![\partial_n u_h]\!]\|_{0,e}.$$

7 Punkte

ÜBUNG 2 HÄNGENDE KNOTEN

Gegeben sei die folgende Simplex-Triangulierung $\mathcal{T}$ des Einheitsquadrats mit angegebener Nummerierung der Elemente:



Geben Sie explizit eine Basis $\{\phi_i\}_{i\geqslant 0}$ an, welche den $H^1(\Omega)$ konformen Raum

$$P_c^1 = \{v_h \in C^0(\Omega), \quad \forall t \in \mathcal{T} : v_h\big|_t \in \mathbb{P}^1\}$$

aufspannt.

3 Punkte

ÜBUNG 3 KONVEKTION-DIFFUSIONSGLEICHUNG

Im Verzeichnis *uebungen/uebung10* des aktuellen *dune-npde* Moduls befindet sich ein Programm, welches das Konvektion-Diffusionproblem

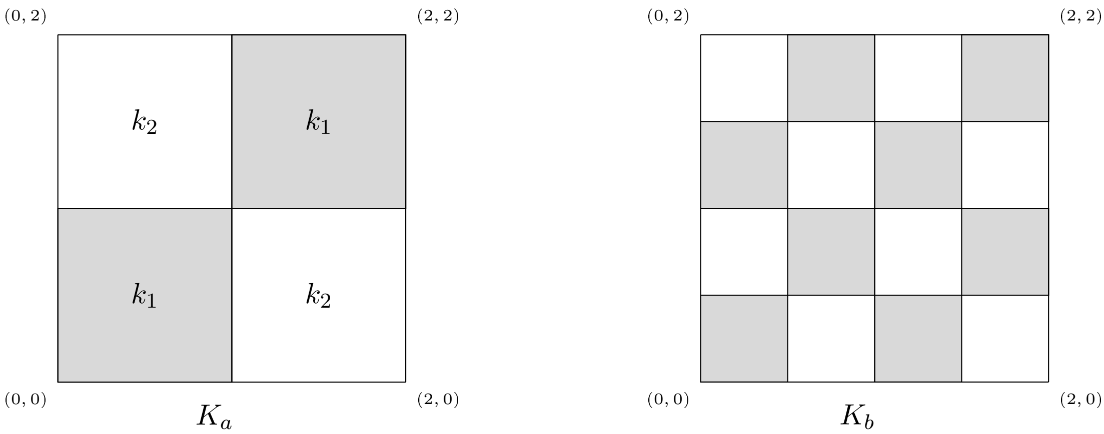
$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k(x)\nabla u) + a(x) \cdot \nabla u = 0 \qquad & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), \quad & x \in \partial\Omega_D \\ (a(x) - k(x)\nabla u) \cdot n = j(x), \quad & x \in \partial\Omega_N \end{aligned}$$

unter Verwendung von Q^1 Finiten-Elementen auf einem konformen Vierecks-Gitter löst. Das Problem-Gebiet wurde dabei als $\Omega = [0,2] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$ gewählt.

1. Zuerst betrachten wir nur Diffusionproblem, dh. $a(x) = \vec{0}$ mit Randbedingungen

$$u = 1 \text{ für } x_1 = 0,\ u = -1 \text{ für } x_1 = 2,\ \text{(Dirichlet links und rechts)}$$
$$\nabla u \cdot n = 0 \text{ sonst.}$$

   Das Permeabilitätsfeld ist heterogen. Im Programm wurde das linke Permeabilitätsfeld (K_a) benutzt. Implementieren Sie aus das rechte Permeabilitätsfeld (K_b), siehe Abbildung.



K_a K_b

2. In der Datei *utilities.hh* ist die Funktion *flux*. Was berechnet diese Funktion?

3. Im Beispiel 8.19*b* im Skript wurde Funktion $j(\xi)$ als Integral auf dem Gebiet $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$ definiert, wobei $j(\xi) = \sqrt{k_1 k_2}$. Wie kann man diese Funktion und auch das Ergebnis für unseres Problem mit dem Permeabilitätsfeld K_b verbreiten? Wie ändern sich die Werte der *flux* Funktion mit K_a und K_b bei der Verfeinerung?

4. Jetzt betrachten wir nur Permeabilitätsfeld K_b mit Koeffizienten $k_1 = 3.10^{-4}$, $k_2 = 10^{-1}$. Die Geschwindigkeit sei gegeben als $a = (0.001, 0)^T$. Vergleichen Sie die Konvergenzraten und die Zeit für verschiedene Verfeinerungen (*max_level = 4,6,8*) und verschiedene lineare Löser

   Dune::PDELab::ISTLBackend_SEQ_BCGS_AMG_SSOR
   Dune::PDELab::ISTLBackend _SEQ_CG_SSOR
   Dune::PDELab::ISTLBackend _SEQ_CG_Jac.

   Wie ändert sich die Anzahl der Iteration und die Rechenzeit? Tragen Sie für diese Löser die Iterationszahl gegen die Anzahl Freiheitsgrade in einem Graf oder in einer Tabelle auf.

5. Was passiert wenn die Diffusion zu klein ist (Advektion dominiert)? Finden Sie die Koeffizienten k_i, dass Peclet Nummer ungefähr 1 ist. Was kann man danach beobachten?

6. Wie musste man die Randbedingungen ändern, wenn die Advektion dominiert?

10 Punkte