ÜBUNG 1 RECOVERY-BASED FEHLERSCHÄTZER

Im Kapitel 8 wurde die *a priori* Fehlerschätzung und die Konvergenzordnung des Diskretisierungsfehler für verschiedene Normen hergeleitet. Leider sind diese Abschätzungen für eine qualitative Fehlerskontrolle nicht zu gebrauchen, da die nötige Informationen bezüglich die exakte Lösung fehlen. In allgemeinen Situationen muß man sich aber anderer Methoden bedienen, die zur Bestimmung der Regularität der Lösung führen.

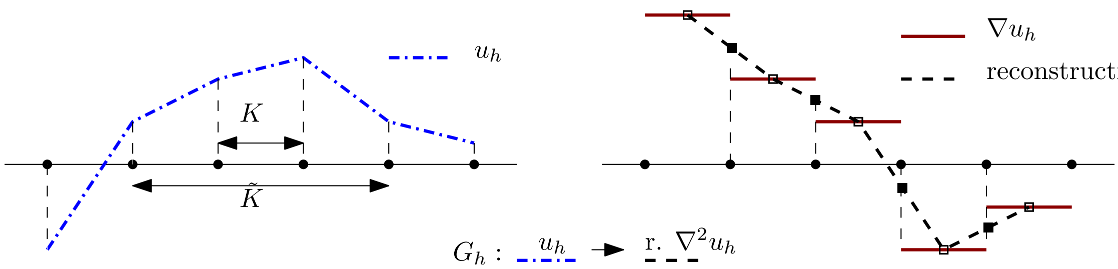
Eine naherliegende Idee wäre die Schätzung der lokalen Glattheit der unbekannten Lösung aus der berechneten numerischen Approximation.

Sei u_h die numerische Lösung des elliptischen Problems in $1D$ mit P^1 Finiten Elementen. Man kann versuchen aus einer linearen Näherlösung u_h durch Anwendung eines Differenzquotienten zweiter Ordnung eine Schätzung der zweiten Ableitung zu gewinnen. Diese Operation G_h ist in der Abbildung dargestellt. Der Ferhlerschätzer, der mit dem Element K verbunden ist, ist als

$$\eta_K = \|G_h(u_h) - \nabla u_h\|_{L_2(k)}$$

definiert.

1. Erweitern Sie diese Idee in 2 Dimensionen. Wie sieht der Operator G aus?
2. Vergleichen Sie diesen Fehlerschätzer mit dem aus der Vorlesung in verschiedenen Aspekten:
   (a) Größe des Fehlers.
   (b) Fehlerakkumulation: kann man den Fehler in u_h abschätzen, oder akkumuliert sich immer der Fehler?
   (c) Implementierungs- und Rechenaufwand.
   (d) Welche Gebiet-Trieangulierung und welche FE kann man benutzen?



6 Punkte

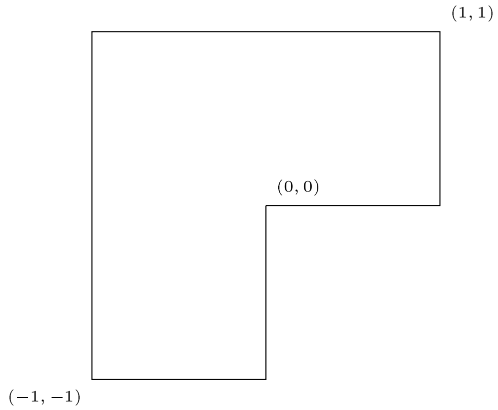
ÜBUNG 2 FEHLERSCHÄTZER FÜR LAPLACE-PROBLEM

Bei der Vorlesung wird die *a posteriori* Fehlerabschätzung für das allgemeine elliptische Problem abgeleitet. Wir betrachten hier das Laplace-Problem mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

auf einem (nicht notwendig konvexen) Polygongebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung von P^1 Finiten-Elementen.

Mit der Hilfe der Vorlesung leiten Sie für dieses Problem die *a posteriori* Abschätzung für den Fehler $e_h = u - u_h$ ab. *3 Punkte*



Auf dem in der Abbildung dargestellten Gebiet Ω soll das Laplace-Problem $\Delta u = 0$ gelöst werden. Auf dem gesamten Rand werden Dirichlet-Randbedingungen verwendet, welche gemäß $u\big|_{\partial\Omega} = g\big|_{\partial\Omega}$ durch die harmonische Funktion

$$g(r, \phi) = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\phi)$$

in Polarkoodinaten gegeben sind.

Im Ordner *uebungen/uebung11* des aktuellen *dune-npde* Moduls finden Sie eine Implementierung dieses Problems für eine konforme Diskretisierung mit P_1 Elementen auf einem Simplex-Gitter. Ihre Aufgabe ist es den, in der Vorlesung vorgestellten residualen a-posteriori Fehlerschätzer für die P_1 Elemente zu implementieren und für eine adaptive Gitter-Verfeinerungs-Strategie zu verwenden. In der vorgegebenen Implementierung sind bereits einige Konstrukte enthalten, welche Sie hierzu nutzen können.

1. Vervollständigen Sie das Code-Skelett der Funktion `computeLocalError()` in der Datei *local_error.hh*, so dass diese die residualen Fehler-Indikatoren η_t aus der Vorlesung korrekt berechnet.

2. Die Funktion `adaptGrid()` ist bereits vollständig implementiert und verfeinert das Gitter abhängig von den Werten im Vektor `indicators`. Verwenden Sie diese Funktion, um das Gitter abhängig von den lokalen Fehlerindikatoren zu verfeinern. Implementieren Sie hierzu beide aus der Vorlesung bekannten Strategien. Vergleichen Sie die beiden Strategien qualitativ.

3. Entscheiden Sie sich für eine Strategie und vergleichen Sie die erreichte Genauigkeit pro Anzahl Freiheitsgrade mit dem Ergebnis global uniformer Gitter-Verfeinerung.

11 Punkte