Numerik Partieller Differentialgleichungen, Sommersemester 2011/2012 — Aufgabenblatt 5
Prof. Peter Bastian — Abgabe 30. Mai 2012
IWR, Universität Heidelberg

ÜBUNG 1 ABSCHÄTZUNG H^1-NORM GEGEN HÖLDER-NORM

Sei $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Die Hölder-Norm einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ für $m \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, 1]$ ist gegeben durch

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}} := \sum_{|s|\leq m} \|\partial^s f\|_\infty + \sum_{|s|=m} \sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}; x, y \in \Omega, x \neq y\}$$

.

Sei $1 < p \leq \infty$ und $\alpha := 1 - \frac{1}{p}$. Dann gibt es eine Konstante C und $x_0 \in \Omega$, so dass für $f \in C^1(\Omega)$ gilt:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} \leq |f(x_0)| + C\|f'\|_{L^p}$$

Verwenden Sie hierzu die Hölder-Ungleichung:
Sei $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt $fg \in L^1(\Omega)$ und

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

3 Punkte

ÜBUNG 2 H^1 FUNKTIONEN

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskugel.

1. Für welche α ist die Funktion in Polarkoordinaten

$$f(r, \phi) = r^\alpha \, sin(\alpha\phi) \tag{1}$$

   ein Element aus $H^1(\Omega)$.

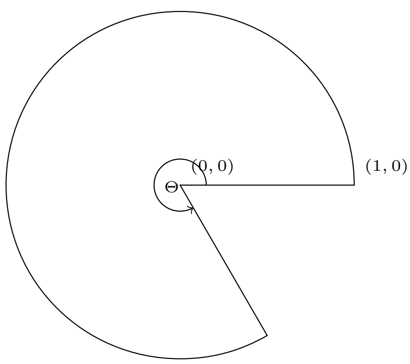
2. Auf dem in der Abbildung dargestellten Gebiet Ω soll das Laplace-Problem $\Delta u = 0$ gelöst werden. Auf dem gesamten Rand werden Dirichlet-Randbedingungen verwendet.

   Funktion (1) ist eine spezielle Form der harmonischen Funktion

$$g(r, \phi) = r^{\frac{\pi}{\Theta}} \sin(\frac{\pi}{\Theta}\phi).$$

   Zeigen Sie, dass g harmonisch ist, also $\Delta u = 0$ gilt.

   Schreiben Sie explizit die Dirichlet-Randbedingungen.



3 Punkte

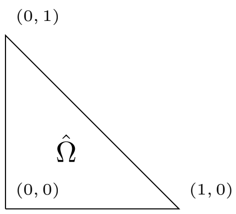
ÜBUNG 3 UNSTETIGE H^1 FUNKTIONEN IN 2D UND 3D

1. Sei $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$, wobei
$$B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < R\}, \quad 0 < R < \frac{1}{e}.$$
Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f(x) = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{r(x)}\right)\right), \quad r(x) = \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
in $H^1(\Omega)$ ist, obwohl diese Funktion unstetig ist (Singularität in einem Punkt).

2. Sei $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Funktion $g = g(x_1, x_2, x_3)$, die in $H^1(\Omega)$ ist und eine Singularität nicht nur in einem Punkt hat, sondern auf einer 1D Kurve.
Hinweis: Inspiration in 1.

6 Punkte

ÜBUNG 4 LOKALE PK-BASIS



Die lokale Pk-Basis beschreibt auf einem d-dimensionalen Simplex (also Dreieck (2d), Tetraheder (3d), ...) allgemein eine Basis der Polynome vom Grad kleiner gleich k. Sie sind in zwei Dimensionen bezüglich des (in der Abbildung) beschriebenen Referenzdreiecks $\hat{\Omega}$ definiert (das Dreieck ist also ihr Definitionsgebiet).

In der Datei *uebung05.cc* im Ordner *uebungen/uebung05/* des aktuellen *dune-npde* Moduls wird gezeigt, wie die im Modul *dune-localfunctions* vorhandene Implementierung dieser Basis genutzt werden kann, um sowohl die Funktionswerte als auch die Ableitungen der einzelnen Basisfunktionen an einer gegebenen Koordinate zu berechnen.

1. Schreiben Sie einen Funktor, welcher zu einer gegebenen Pk-Basis bestehend aus den Funktionen $(\psi_i)_{i \leq n_k}$ mit $\psi_i \in \mathbb{P}^k(\hat{\Omega})$ und gegebenen Vektor aus Koeffizienten $(\alpha_i)_{i \leq n_k}$ aus $\mathbb{R}$ die Funktion
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i \psi_i(x)$$
berechnet. Ein Skelett dieses Funktors ist bereits in der Datei *functors.hh* angelegt. Die zugehörige Klasse heißt `LocalFunctor`. Sie müssen lediglich die `operator()` Funktion implementieren.

2. Nachdem der Funktor implementiert ist, sollten die erzeugten $.vtu$ Dateien korrekte Visualisierungen der Pk-Basisfunktionen enthalten. Beschreiben Sie qualitativ die charakteristischen Eigenschaften dieser Basisfunktionen.

3. Zeigen Sie, dass die Pk-Funktionen wirklich eine Basis der Polynome k-ter Ordnung auf dem Referenzdreieck darstellen. Implementieren Sie hierzu zunächst einen Funktor (analog zu dem der Pk-Basis), welcher die Monom-Basisfunktionen auswertet. Verwenden Sie diese dann, um die lineare Unabhängigkeit der Pk-Funktionen zu zeigen.

10 Punkte