Übung 1 Lipschitz- und Kegel Gebiete in 2D

1. Entscheiden Sie, ob folgende Gebiete Ω die Lipschitz- und Kegel Bedingungen erfüllen:

   (a)
   $$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1,\, |y| < x^r,\, r > 1\right\}$$

   (b)
   $$\Omega_1 = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 < r < 1,\, 0 < \theta < \frac{3}{2}\pi\right\}$$
   $$\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -0.5 < x < 0.5,\, y \geq |x|,\, y \leq 0.5\right\}$$
   $$\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$$

2. Finden Sie ein Gebiet in 2D, das Kegel aber nicht Lipschitz ist.

3 Punkte

Übung 2 Gemischte Randbedingung

Zeigen Sie, dass eine Lösung u der Poisson Gleichung mit gemischten Robin Randbedingungen $u + \partial_n u = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$ das folgende schwach formulierte Problem erfüllt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega).$$

Zeigen Sie schließlich für $f \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ auch die Eindeutigkeit von u. *5 Punkte*

Übung 3 Fehlerabschätzung

Es sei $a : \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ die Bilinearform $a(u,v) := (\nabla u, \nabla v)$ und $l : \mathcal{H}^1(\Omega)$ ein lineares Funktional. Des weiteren sei $V_h \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ein endlichdimensionaler Teilraum und $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, $u_h \in V_h$ erfüllen jeweils

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$$

sowie

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_0^2 = \|\nabla u\|_0^2 - \|\nabla u_h\|_0^2.$$

3 Punkte

ÜBUNG 4 INTERPOLATION

In dieser Aufgabe sollen Sie die Eigenschaften und Konvergenz bei Interpolation mit der P_k Basis untersuchen. Das Programm im Unterverzeichnis *uebungen/uebung06* im aktuellen *dune-npde* Modul implementiert eine d-dimensionale P_k Interpolation der Funktion

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{x_i + 0.5}$$

für den ein- und zwei-dimensionalen Fall. Dabei wird in 1D im Intervall $[0, 1]$ interpoliert und in 2D im "Einheitsdreieck", welches auch in der letzten Übung als Gebiet benutzt wurde. Das Programm erzeugt VTK Dateien, zur Visualisierung der Referenzfunktion f, der Interpolierenden sowie der einzelnen Basisfunktionen.

1. Lesen Sie sich das Programm durch. Was passiert in der Funktion `interpolate_function()`?

2. Die Funktion `uniform_integration()` wurde gegenüber der letzten Aufgabe modifiziert. Benennen Sie die Änderungen und begründen Sie ihre Notwendigkeit.

3. Für die Verwendung mit der Funktion `uniform_integration()` muss die mit der *dune-pdelab* API erstellte Interpolations-Funktion (bzw. das Funktionsobjekt) `interpolated` mit der in *functors.hh* definierten Klasse `GridLevelFunction` verschachtelt werden. Warum ist das notwendig? Was würde sonst berechnet werden?

4. Führen Sie das Programm mit den in der Datei *uebung06.ini* voreingestellten Parametern aus. Das Programm berechnet den L_2 Fehler der Interpolation. Entspricht die asymptotische Konvergenz Ihren Erwartungen? Schätzen Sie anhand der Ausgabe auf wie viele Stellen genau der L_2 Fehler auf Level 4 mit $k = 4$ berechnet wurde. *E*rweitern Sie das Programm in 2D, dass es auch für Einheitsquadratgebiet funktioniert. Als Basisfunktionem auf dem Viereck verwenden Sie *Dune::PDELab::Q1LocalFiniteElementMap* und *Dune::PDELab::Q22DLocalFiniteElementMap*. Vergleichen Sie den L_2 Fehler für P_1, P_2, Q_1 und Q_1 Elemente gegen die Anzahl Freiheitsgrade. Haben Sie einen Unterschied beobachtet?

5. Implementieren Sie eine alternative Referenzfunktion

   $$g(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| < 0.25 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Tragen Sie für f und g für die Polynomgrade $1 \leq k \leq 4$ den L_2 Fehler gegen die Anzahl Freiheitsgrade in einem Diagramm auf. Erklären Sie den Unterschied.

10 Punkte