ÜBUNG 1 BRAMBLE-HILBERT IN 1D

Sei $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $w : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $w \in H^2(\Omega)$. Es seien x_k die Vertizes eine Triangulierung von Ω mit $x_k = a + \sum_{i=1}^{k} h_i$, $k = 0 \ldots N$ und $h_k > 0$ so dass $x_0 = a$ und $x_N = b$. Die stückweise linear interpolierende Funktion v zu w erfülle $v(x_i) = w(x_i)$ für $(i = 0 \ldots N)$. Es sei $\hat{\Omega} = [0, 1]$ das Referenzelement und $\mu_k : \hat{\Omega} - > [x_{k-1}, x_k]$ die zugehörige Transformation zu jeder Gitterzelle.

Zeigen Sie, dass für $e(x) := w - v$ und $\hat{e}_k(\hat{x}) := e(\mu_k(\hat{x}))$ gilt

$$|\hat{e}_k|_{1,\hat{\Omega}} \leqslant \|\partial_{\hat{x}\hat{x}} \hat{e}_k\|_{0,\hat{\Omega}}$$

und mit $h = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \{h_k\}$ auch

$$\|e\|_{1,\Omega}^2 \leqslant h^2(h + 1)\|\partial_{xx} w\|_{0,\Omega}^2.$$

5 Punkte

ÜBUNG 2 INTERPOLATION AUF DREIECK

Sei $v \in C^2(K)$ und K ein Dreieck mit Vertizes $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$. Mit ϕ_i für $i = 1, 2, 3$ seien die $P^1(K)$ Basis-Funktionen bezeichnet, welche $\phi_i(a_j) = \delta_{ij}$ erfüllen. Die Länge der größten Seite von K sei durch h_K, der kleinste Winkel durch τ_K gegeben.

Die P^1 Interpolations-Funktion hat die Form

$$\Pi v(x) = \sum_{i=0}^{3} v(a_i)\phi_i(x).$$

Beweisen Sie die Abschätzungen:

1. $$\|v - \Pi v\|_{L_\infty(K)} \leqslant \frac{1}{2} h_K^2 \|D^2 v\|_{L_\infty(K)}$$

2. $$\|\nabla(v - \Pi v)\|_{L_\infty(K)} \leqslant \frac{3}{\sin \tau_K} h_K \|D^2 v\|_{L_\infty(K)}$$

5 Punkte

ÜBUNG 3 KONVERGENZRATEN FÜR POISSON GLEICHUNG

Sei $\Omega = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2,\ 0 < a, b \in \mathbb{R}$. Die Poisson Gleichung

$$-\Delta u(x,y) = \left(\frac{3b}{2}y^2 - \frac{b^2}{2}y - y^3\right)(6x - 3a) + \left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{a^2}{2}x - x^3\right)(6y - 3b) \quad (x,y) \in \Omega \tag{1}$$

mit homogenen Dirichlet Randbedingungen hat die analytische Lösung

$$u(x,y) = xy(a-x)(b-y)\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{b}{2} - y\right).$$

Im Verzeichnis *uebungen/uebung09* des aktuellen *dune-npde* Moduls befindet sich ein Programm, welches das Poisson-Problem (1) unter Verwendung von P^k Finiten-Elementen auf einem konformen Dreiecks-Gitter (*UGGrid*) und unter Verwendung von Q^1 und Q^2 Finiten-Elementen auf einem konformen Vierecks-Gitter (*YaspGrid*) löst. Das Problem-Gebiet wurde dabei als $\Omega = [0,2] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$ gewählt.

1. Implementieren Sie die Funktion *evaluate* in der Klasse *ExactGradient*. Diese Funktion sollte den Gradient von u auswerten. Dann kann das Programm die Normen $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ und $\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega}$ berechnen. Erweitern Sie das Programm, dass man auch die Normen $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ und $\|u - u_h\|_{L_\infty(\Omega)}$ und entsprechende Konvergenzraten als Ergebnis bekommt.

2. Verwenden Sie auch Crouzeix-Raviart Finiten-Elementen um dieses Problem zu lösen.

3. Tragen Sie für P^k, Q^1, Q^2, QR Elemente den $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$, $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ und $\|u - u_h\|_{L_\infty(\Omega)}$ Fehler gegen die Anzahl Freiheitsgrade in einem Graf auf. Beide Achsen lieber mit logarithmischen Skalen darstellen (siehe Skript, Abbildung 7.4).

4. Implementieren Sie eine Funktion, um den Wert von

$$f(u_h, \Omega) = \max_i |u(a_i) - u_h(a_i)|, \text{ wo } a_0, \ldots, a_{N-1} \in \overline{\Omega} \text{ die Knoten sind,}$$

zu berechnen. Was liefert diese Funktion für P^1 und QR Elemente? Könnten Sie diese Beobachtung erklären?

5. Verwenden Sie einen anderen linearen Löser. Siehe http://www.dune-project.org/doc-pdelab-trunk/doxygen/html/group__PDELab__seqsolvers.html, aber nicht *SuperLU*. Vergleichen Sie die Anzahl der Iterationen mit dem ursprünglichen Löser.

Hinweis: Weil wir schon ziemlich große Probleme berechnen, sollten wir unseren Kode mit

make CXXFLAGS='-O3 -march=native -g0 -funroll-loops -ftree-vectorize'

optimieren.

10 Punkte