Übung 1 Vektoranalysis in Kugelkoordinaten

Die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) sind relativ zu den Kartesischen Koordinaten (x, y, z) durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ y &= r \cos\theta \end{aligned}$$

gegeben. Die Einheitsvektoren im System der Kugelkoordinaten sind nicht konstant und hängen mit den Kartesischen Einheitsvektoren durch

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \sin\theta \cos\phi \, \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \, \vec{e}_y + \cos\theta \, \vec{e}_z \\ \vec{\theta} &= \cos\theta \cos\phi \, \vec{e}_x + \cos\theta \sin\phi \, \vec{e}_y - \sin\theta \, \vec{e}_z \\ \vec{\phi} &= -\sin\phi \, \vec{e}_x + \cos\phi \, \vec{e}_y \end{aligned}$$

zusammen.

Zeigen Sie, dass der Gradient in Kugelkoordinaten durch

$$\nabla f = \vec{r} \, \partial_r f + \vec{\theta} \, \frac{1}{r} \, \partial_\theta f + \vec{\phi} \, \frac{1}{r \sin\theta} \, \partial_\phi f$$

und der Laplace-Operator durch

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \, \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 f$$

gegeben ist. *5 Punkte*

Übung 2 Gravitationspotential einer Vollkugel

Das Gravitationspotential einer Vollkugel mit Radius R ist gegeben durch die Poisson-Gleichung

$$\Delta \Psi(x) = 4\pi G \rho(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

und die zugehörige Dichteverteilung in Polarkoordinaten

$$\rho(r, \theta, \phi) = \begin{cases} 1 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}.$$

Bestimmen Sie zunächst getrennt für beide Teilgebiete $0 \leq r \leq R$ und $R < r < \infty$ die Allgemeinen Lösungen für $\Psi(x)$ in geschlossener Form. Wählen Sie dann die auftretenden Konstanten so, dass die Lösungen bei $r = R$ stetig ineinander übergehen.

5 Punkte

Übung 3 Dimensionsbezogene Modellreduktion

In dieser Aufgabe soll die Wärmeleitung innerhalb eines Drahtes betrachtet werden. Der Draht habe Länge L und sein Durchmesser variiere entlang dieser Länge. Das Volumen des Drahtes sei in Zylinderkoordinaten (ϕ, r, z) durch

$$V := \{(\phi, r, z) | \phi \in (0, 2\pi), z \in [0, L], r \leq R(z)\}$$

beschrieben, wobei $R(z) : [0, L] \to \mathbb{R}$ den positionsabhängigen Radius des Drahtes beschreibt.

Der Draht sei homogen, die Größen c (Wärmekapazität, $\frac{J}{kgK}$), λ (Wärmeleitfähigkeit, $\frac{W}{mK}$) und ρ (Dichte, $\frac{kg}{m^3}$) also konstant. An den beiden Endflächen des Drahtes sollen jeweils die Temperaturen T_0 und T_L mit $T_0 > T_L$ angelegt werden. Die Seitenflächen seien thermisch isoliert. Zum Anfangszeitpunkt t_0 habe der Draht überall Temperatur T_L. Für $t \geq t_0$ werde die Propagation des Systems durch

$$\partial_t(\rho c T(\vec{x})) + \nabla \cdot (-\lambda \nabla T(\vec{x})) = 0, \qquad (\forall x \in V)$$

beschrieben.

1. Formulieren Sie explizit die *Dirichlet* bzw. *Neumann* Randbedingungen gemäß der obigen Beschreibung.

2. Geben Sie ein einfaches geometrisches Argument dafür an, dass bei diesen Randbedingungen und variierender Dicke des Drahtes die Ableitungen $\partial_x T$ und $\partial_y T$ nicht überall in V verschwinden können.

3. Angenommen der Draht sei sehr dünn, relativ zu seiner Länge. Es ist dann sinnvoll anzunehmen, dass die Näherungen $\partial_y T \approx 0$ und $\partial_x T \approx 0$ gut erfüllt sind (bzw. $|\partial_z T| \gg |\partial_x T| + |\partial_y T|$). Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die Propagation durch die auf eine Dimension reduzierte Gleichung

$$\partial_t(\pi R(z)^2 \rho c T(z)) + \partial_z(-\lambda \pi R(z)^2 \partial_z T(z)) = 0, \qquad (\forall z \in [0, L])$$

beschrieben werden kann.

5 Punkte

ÜBUNG 4 DUNE GITTERSCHNITTSTELLE (PRAKTISCHE AUFGABE)

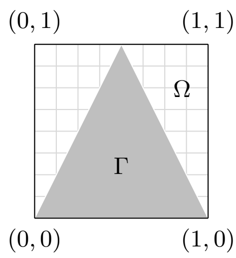
In dieser Übung sollen sie sich mit der Gitterschnittstelle von DUNE vertraut machen. Im Unterverzeichnis */dune-npde/uebungen/uebung1* des *dune-npde* Moduls[†] finden Sie ein Beispielprogramm, welches das Integral der analytische Funktion

$$f(x, y) = \exp^{-3.234(x-0.5)^2}$$

durch Quadratur erster Ordnung auf den Zellen eines strukturierten Gitters approximiert. Das integrierte Gebiet ist in diesem Fall das Einheitsquadrat $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Die Integration wird für mehrere Gitterauflösungen durchgeführt (beginnend mit einer einzigen Zelle), um die Konvergenz des Integrals zu bestimmen. Außerdem wird die Funktion f_h, welche f in den Gittervertizes interpoliert, für jede Gitterauflösung als VTK Datei für eine spätere Visualisierung gespeichert.

1. Machen Sie sich zunächst mit dem Quellcode vertraut und führen Sie das Programm probeweise aus. Starten Sie das Programm *paraview* um die geschriebenen VTK Dateien zu betrachten. Experimentieren Sie ein bisschen mit den *paraview* Filtern (insbesondere dem *warp* Filter).

2. Modifiziern Sie das Programm nun so, dass die Funktion f nicht mehr auf dem ganzen Gebiet Ω integriert wird, sondern nur noch auf dem dreieckigen Teilgebiet $\Gamma \subset \Omega$, das in der nachfolgenden Grafik als grauer Schatten dargestellt ist.



[†]Dieses Modul können Sie von unserem Server beziehen. Hinweise darauf finden Sie auf der Hompage der Vorlesung.

Implementieren Sie hierbei zwei verschiedene Vorgehensweisen:

i) Nur Zellen, welche ganz in Γ enthalten sind werden in der Quadratur berücksichtigt.

ii) Nur Zellen, für die wenigstens ein Vertex in Γ enthalten ist werden in der Quadratur berücksichtigt.

3. Anstatt das Teilgebiet Γ durch Auschnitte eines strukturierten Gitters zu approximieren, soll nun die Integration auf einem unstrukturierten Dreicks-Gitter durchgeführt werden, welches Γ exakt überdeckt. Ein passendes Gitter, bestehend ist in der Datei *triangle.msh* enthalten. Diese Datei kann durch

```
typedef Dune::UGGrid<2> GridType;
GridType grid;
std::vector<int> boundary_index_map, element_index_map;
Dune::GmshReader<GridType> gmsh_reader;
gmsh_reader.read(grid,"triangle.msh",boundary_index_map,
                 element_index_map,true,false);
```

in ein DUNE-Gitter eingelesen werden. Vergleichen Sie die Konvergenz der Quadratur auf diesem Gitter mit jener auf dem strukturierten Gitter.

4. *(Bonus)* Modifizieren Sie die Klasse *FunctorVTKFunction* derart, dass Sie auf allen Zellen, die nicht ganz in Γ enthalten sind nur noch Null ausgibt.

8 (+2) Punkte