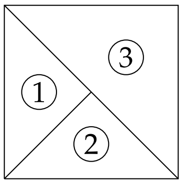
Übung 1 Hängende Knoten

Gegeben sei die folgende Simplex-Triangulierung $\mathcal{T}$ des Einheitsquadrats mit angegebener Nummerierung der Elemente:



Geben Sie explizit eine Basis $\{\phi_i\}_{i\geqslant 0}$ an, welche den $H^1(\Omega)$ konformen Raum

$$P_c^1 = \{v_h \in C^0(\Omega), \quad \forall t \in \mathcal{T} : v_h\big|_t \in \mathbb{P}^1\}$$

aufspannt.

3 Punkte

Übung 2 Crouzeix-Raviart A-Posteriori Fehler

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand und $\{\mathcal{T}_h\}_h$ eine Folge konformer und regulärer Simplex-Triangulierungen mit größter Kantenlänge h. Die Menge der Kanten in einem $\mathcal{T}_h$ seien mit $\mathcal{F}_h$ bezeichnet. Für gegebenes $\mathcal{T}_h$ seien die Räume

$$P_{c,0}^1 = \{v_h \in C^0(\Omega), \quad v_h\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall t \in \mathcal{T}_h : v_h\big|_t \in \mathbb{P}^1\}$$

und

$$P_{pt,0}^1 = \{v_h \in L^1(\Omega), \quad \forall t \in \mathcal{T}_h : v_h\big|_t \in \mathbb{P}^1, \quad \forall e \in \mathcal{F}_h : \int_e [\![v_h]\!]_e = 0\},$$

wobei $[\![f]\!]_e$ den Sprung einer Funktion f auf der Kante e bezeichnet (was im Falle von $e \subset \partial\Omega$ als $f\big|_e = 0$ interpretiert wird). Von beiden Räumen ist nur $P_{c,0}^1$ in $H_0^1(\Omega)$ enthalten.

Für $V_h := H_0^1(\Omega) + P_{pt,0}^1$ sei die Bilinearform $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ durch

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{t\in\mathcal{T}_h} \int_t \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx$$

gegeben und eine Norm:

$$|v_h|_{V_h} := \sqrt{a_h(v_h, v_h)}.$$

Im Übrigen gilt die erweiterte Poincaré Ungleichung:

$$\forall v_h \in V_h : c\|v_h\|_{0,\Omega} \leqslant |v_h|_{V_h}, \qquad (c \text{ hängt nur von } \Omega \text{ ab}).$$

Die Funktionen $u \in H_0^1(\Omega)$ und $u_h \in V_h$ erfüllen jeweils

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

und

$$\forall v_h \in V_h : \sum_{t\in\mathcal{T}_h} \int_t \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_\Omega f v_h dx.$$

Zeigen Sie die a-posteriori Fehler-Abschätzung:

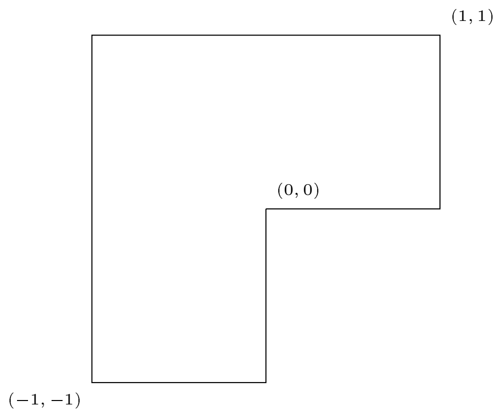
$$|u - u_h|_{V_h} \leqslant c(\sum_{t \in \mathcal{T}_h} e_t(u_h, f)^2)^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_h \in P^1_{c,0}} |u_h - v_h|_{V_h},$$

wobei c unabhängig von h seien soll und außerdem: (h_e bzw. h_t bezeichnen jeweils die Länge von e bzw. die längste Kante in t)

$$e_t(u_h, f) = h_t \|f + \Delta u_h\|_{0,t} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial t} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\![\partial_n u_h]\!]\|_{0,e}.$$

7 Punkte

Übung 3 Residualer Fehlerschätzer



Auf dem in der Abbildung dargestellten Gebiet Ω soll das Laplace-Problem $\Delta u = 0$ gelöst werden. Auf dem gesamten Rand werden Dirichlet-Randbedingungen verwendet, welche gemäß $u\big|_{\partial\Omega} = g\big|_{\partial\Omega}$ durch die harmonische Funktion

$$g(r, \phi) = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\phi)$$

in Polarkoodinaten gegeben sind.

Im Ordner *uebungen/uebung10* des aktuellen *dune-npde* Moduls finden Sie eine Implementierung dieses Problems für eine konforme Diskretisierung mit P_1 Elementen auf einem Simplex-Gitter. Ihre Aufgabe ist es den, in der Vorlesung vorgestellten residualen a-posteriori Fehlerschätzer für die P_1 Elemente zu implementieren und für eine adaptive Gitter-Verfeinerungs-Strategie zu verwenden. In der vorgegebenen Implementierung sind bereits einige Konstrukte enthalten, welche Sie hierzu nutzen können.

1. Vervollständigen Sie das Code-Skelett der Funktion `computeLocalError()` in der Datei *local_error.hh*, so dass diese die residualen Fehler-Indikatoren η_t aus der Vorlesung korrekt berechnet.

2. Die Funktion `adaptGrid()` ist bereits vollständig implementiert und verfeinert das Gitter abhängig von den Werten im Vektor `indicators`. Verwenden Sie diese Funktion, um das Gitter abhängig von den lokalen Fehlerindikatoren zu verfeinern. Implementieren Sie hierzu beide aus der Vorlesung bekannten Strategien. Vergleichen Sie die beiden Strategien qualitativ.

3. Entscheiden Sie sich für eine Strategie und vergleichen Sie die erreichte Genauigkeit pro Anzahl Freiheitsgrade mit dem Ergebnis global uniformer Gitter-Verfeinerung.

10 Punkte