Übung 1 Charakteristische Ebenen der Wellengleichung

Gegeben sei die hyperbolische Wellengleichung in zwei Dimensionen:

$$\partial_t^2 u - c^2 \left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Normalenvektoren aller möglichen charakteristischen Flächen zwei Kegel mit Öffnungswinkel $\alpha = \arctan(c)$ bilden.

5 Punkte

Übung 2 Analytische Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Gegeben sei die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$$

auf dem Raum-Zeit Gebiet

$$D^+ = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1,\ 0 < t < \infty\right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass ein zugehöriges Anfangswertproblem mit Startbedingung $u(x,t)\big|_{t=0} = f$ und Randbedingung $u(0,t) = u(1,t) = 0$ für $f \in C^1([0,1])$ von der Funktion

   $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

   gelöst wird. Hierbei bezeichnet $\tilde{f}_n$ den n-ten Fourier Koeffizient von f. Machen Sie hierfür den Separationsansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion

   $$\Phi = \frac{1}{\sqrt{4t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

   eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung beschreibt.

5 Punkte

Übung 3 Energie

1. Gegeben Sei die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

   $$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$$

   auf dem Raum-Zeit Gebiet

   $$D^+ = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1,\ 0 < t < \infty\right\}.$$

   Zeigen Sie: Sei $u \in C^2(\overline{D^+})$ eine Lösung mit Randbedingung $u(0,t) = u(1,t) = 0$, dann gilt für beliebige $t_1 > t_0 > 0$:

   $$\int_0^1 u^2(x,t_1)dx \leq \int_0^1 u^2(x,t_0)dx.$$

   Tipp: Zeigen Sie zunächst: $\partial_t(u^2) = 2\partial_x(u\partial_x u) - 2(\partial_x u)^2$.

2. Gegeben Sei die ein-dimensionale Wellengleichung
$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$$
auf dem Raum-Zeit Gebiet
$$D^+ = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1,\ 0 < t < \infty\right\}.$$
Zeigen Sie: Sei $u \in C^2(\overline{D^+})$ eine Lösung mit Randbedingung $u(0,t) = u(1,t) = 0$, dann gilt für beliebige $t_1 > t_0 > 0$:
$$\int_0^1 u_t^2(x,t_1) + u_x^2(x,t_1)dx = \int_0^1 u_t^2(x,t_0) + u_x^2(x,t_0)dx.$$
Tipp: Zeigen Sie zunächst: $\partial_t[(\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2]/2 - \partial_x[(\partial_x u)(\partial_t u)] = 0$

5 Punkte

ÜBUNG 4 DIFFUSIVE-DÄMPFUNG

Gegeben Sei die ein-dimensionale Wärmeleitungsgleichung
$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$$
auf dem Raum-Zeit Gebiet
$$D^+ = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1,\ 0 < t < \infty\right\}.$$
In dem Programm, welches Sie im Verzeichnis *dune-npde/uebungen/uebung03* des aktuellen *dune-npde* Moduls finden, werden die Fourier-Koeffizienten
$$a_n := 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi n x\, dx \qquad b_n := 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi n x\, dx \qquad (N \geq n \geq 0)$$
der Funktion
$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t}} e^{-\frac{(x-0.5)^2}{4t}}$$
für den Startzeitpunkt $t_0 = 0.001$ berechnet und ausgegeben. Die Funktion `uniformintegration()` bestimmt die dabei auftretenden Integrale - angeblich bis auf eine vorgegebene Genauigkeit, die über den Parameter `accuracy` vorgegeben wird.

1. Beschreiben Sie, wie die Funktion `uniformintegration()` dabei vorgeht. Unter welchen Umständen kann mit der in `accuracy` vorgegebenen Genauigkeit wirklich der Fehler der Quadratur abgeschätzt werden?
2. In der Konfigurationsdatei *uebung03.ini* kann die Quadraturordnung der lokalen Gauss-Quadratur vorgegeben werden. Untersuchen Sie die Konvergenz der auftretenden Integrale anhand der Ausgabe des Programms. Entspricht das Konvergenzverhalten Ihren Erwartungen?
3. Schreiben Sie einen Funktor, welcher die Funktion
$$g(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} e^{-n^2 4\pi^2 (t-t_0)} \left(a_n \sin n2\pi x + b_n \cos n2\pi x\right)$$
realisiert.
4. Schreiben Sie einen Funktor, um (unter Verwendung der Funktion `uniformintegration()`) den Wert von
$$e(t) = \int_0^1 (g(x,t) - f(x,t))^2 dx$$
zu berechnen. Wir verändert sich $e(t)$ im Interval $t = 0.001 \ldots 0.02$? Erstellen Sie VTK Dateien zur Visualisierung im Abstand von $\Delta t = 0.001$ und erklären Sie ihre Beobachtungen.

8 Punkte