ÜBUNG 1 OPERATOR AUF HILBERTRAUM

Sei H ein Hilbertraum und Y ein abgeschlossener Teilraum. Die Abbildung $P : H \to Y$ ist für jedes $v \in H$ definiert durch:

$$\forall y \in Y : (P(v), y) = (v, y).$$

Zeigen Sie:

1. P ist linear und stetig.
2. Für $v \in H$ gilt
$$\|P(v) - v\| = \min_{y \in Y} \|y - v\|$$
(Verwenden Sie hierzu das Lemma von *Lax-Milgram* und den zugehörigen *Charakterisierungssatz*).

5 Punkte

ÜBUNG 2 PROJEKTIONEN

Sei Y der Unterraum eines Vektorraumes X. Die lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt Projektion auf Y, falls

$$P^2 = P \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(P) = Y.$$

Zeigen Sie:

1. P ist Projektion genau dann, wenn $P : X \to Y$ und $P = I$ auf Y.
2. Ist P Projektion, dann gilt $X = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$.
3. Die Abbildung P aus Aufgabe 1 ist eine Projektion.

5 Punkte

ÜBUNG 3 SATZ VON RIESZ (KONSTRUKTIV)

Zeigen Sie: Sei H ein Hilbert-Raum, dann existiert für jedes $L \in H'$ genau ein $u \in H$, so dass

$$\forall v \in H : L(v) = (u, v)$$

und es ist $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Zeigen Sie zunächst unter Annahme der Existenz, die Eindeutigkeit von u.
2. Sei $M = \{v \in V | L(v) = 0\}$. Zeigen Sie, dass dann $M^\perp$ ein eindimensionaler Unterraum von H ist (oder $L = 0$ gilt) und außerdem $H = M \oplus M^\perp$.
3. Zeigen Sie, dass für $z \in M^\perp$ der Vektor u gemäß

   $$u = \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z$$

   bestimmt werden kann und damit dann auch den Rest der Behauptung.

5 Punkte

ÜBUNG 4 LINEARE OPERATOREN

1. Seien U, V normierte Vektorräume und $T : U \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass T genau dann stetig ist, wenn

   $$\exists C \in \mathbb{R} : \forall u \in U : \|T(u)\| \leq C\|u\|.$$

2. Die reellen trigonometrischen Polynome habe die Form

   $$t(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

   mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Sei X der Raum aller reellen trigonometrischen Polynome auf $\Omega = (-\pi, \pi)$ mit endlicher Norm

   $$\|t\| = \int_{-\pi}^{\pi} |t(x)| dx.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ einen linearen Operator von X nach X darstellt.

   (b) Zeigen Sie, dass dieser Operator nicht beschränkt und damit auch nicht stetig ist.

   (c) Es ist $X \subset H^1(\Omega)$ und es soll nun $\frac{\partial}{\partial x} : H^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ betrachtet werden. Zeigen Sie, dass die Ableitung unter diesen Umständen einen stetigen Operator darstellt.

5 Punkte