

ÜBUNG 1 ABSCHÄTZUNG H^1 -NORM GEGEN HÖLDER-NORM

Sei $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Die Hölder-Norm einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ für $m \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, 1]$ ist gegeben durch

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_\infty + \sum_{|s|=m} \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}; x, y \in \Omega, x \neq y \right\}$$

Sei $1 < p \leq \infty$ und $\alpha := 1 - \frac{1}{p}$. Dann gibt es eine Konstante C und $x_0 \in \Omega$, so dass für $f \in C^1(\Omega)$ gilt:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} \leq |f(x_0)| + C\|f'\|_{L^p}$$

Verwenden Sie hierzu die Hölder-Ungleichung:

Sei $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt $fg \in L^1(\Omega)$ und

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

3 Punkte

ÜBUNG 2 H^1 FUNKTIONEN

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel.

1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \|x\|^\alpha$$

nur für $\alpha > -\frac{1}{2}$ ein Element aus $H^1(\Omega)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \ln \|x\|$$

ein Element aus $H^1(\Omega)$ ist.

5 Punkte

ÜBUNG 3 DIVERGENT AUF DICHTER TEILMENGE

Sei $\Omega = B_{\frac{1}{4}}(\vec{0})$, wobei

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| < r\}.$$

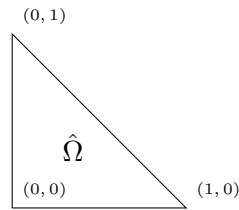
Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f \in H^1(\Omega)$, welche auf einer dichten Teilmenge von Ω divergent ist.

Tipp: Zeigen Sie hierzu zunächst die Funktion

$$g(x) = \ln |\ln \|x\||$$

in $H^1(B_{\frac{1}{2}}(\vec{0}))$ ist.

7 Punkte



Die lokale P_k -Basis beschreibt auf einem d -dimensionalen Simplex (also Dreieck (2d), Tetraeder (3d), ...) allgemein eine Basis der Polynome vom Grad kleiner gleich k . Sie sind in zwei Dimensionen bezüglich des (in der Abbildung) beschriebenen Referenzdreiecks $\hat{\Omega}$ definiert (das Dreieck ist also ihr Definitionsgebiet).

In der Datei `uebung05.cc` im Ordner `uebungen/uebung05/` des aktuellen `dune-mpde` Moduls wird gezeigt, wie die im Modul `dune-localfunctions` vorhandene Implementierung dieser Basis genutzt werden kann, um sowohl die Funktionswerte als auch die Ableitungen der einzelnen Basisfunktionen an einer gegebenen Koordinate zu berechnen.

1. Schreiben Sie einen Funktor, welcher zu einer gegebenen P_k -Basis bestehend aus den Funktionen $(\psi_i)_{i \leq n_k}$ mit $\psi_i \in \mathbb{P}^k(\hat{\Omega})$ und gegebenem Vektor aus Koeffizienten $(\alpha_i)_{i \leq n_k}$ aus \mathbb{R} die Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i \psi_i(x)$$

berechnet. Ein Skelett dieses Funktors ist bereits in der Datei `functors.hh` angelegt. Die zugehörige Klasse heißt `LocalFunctor`. Sie müssen lediglich die `operator()` Funktion implementieren.

2. Nachdem der Funktor implementiert ist, sollten die erzeugten `.vtu` Dateien korrekte Visualisierungen der P_k -Basisfunktionen enthalten. Beschreiben Sie qualitativ die charakteristischen Eigenschaften dieser Basisfunktionen.
3. Zeigen Sie, dass die P_k -Funktionen wirklich eine Basis der Polynome k -ter Ordnung auf dem Referenzdreieck darstellen. Implementieren Sie hierzu zunächst einen Funktor (analog zu dem der P_k -Basis), welcher die Monom-Basisfunktionen auswertet. Verwenden Sie diese dann, um die lineare Unabhängigkeit der P_k -Funktionen zu zeigen.

10 Punkte