Übung 1 Homogene Dirichlet Probleme mit $\mathbb{P}^1$ Elementen

Sei $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{T}_N$ ein äquidistantes Gitter über Ω mit Auflösung $h = (b-a)/N$ für $N \in \mathbb{N}$. Sei

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(a) = v(b) = 0\}$$

ein Vektorraum und

$$V_h = \{v_h \in \mathbb{C}^0(\Omega) \mid \forall s \in \mathcal{T} : v_h\big|_s \in \mathbb{P}^1(s) \quad \wedge \quad v_h(a) = v_h(b) = 0\}$$

ein endlich-dimensionaler Teilraum. Des Weiteren sei die stetige Linearform $l : V \to \mathbb{R}$ und die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

gegeben. Die Vektoren $u \in V$ und $u_h \in V_h$ erfüllen

$$a(u, v) = l(v), \qquad \forall v \in V$$

und

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h.$$

1. Zeigen Sie, dass $(\cdot, \cdot)_V = a(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf V induziert.
2. Zeigen Sie, dass $u(a + ih) = u_h(a + ih)$ für $i \in 0, \dots, N$.

7 Punkte

Übung 2 Das Crouzeix-Raviart Element

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C^1(\Omega)$. Mit $\mathcal{T}$ sei eine konforme Triangulierung von Ω gegeben, bestehend aus d-dimensionalen Simplizes. Die Crouzeix-Raviart Interpolation der Funktion f ist gegeben durch

$$g(x) = \sum_{s \in \mathcal{T}} \sum_{i=0}^{d} \theta_{s,i}(x) f(c_{s,i}) \chi_s(x)$$

wobei für einen gegebenen Simplex s die Koordinaten des Schwerpunkts der i-ten Seitenfläche durch $c_{s,i}$ beschrieben werden und χ_s die zugehörige charakteristische Funktion beschreibt. Zu einer gegebenen Nummerierung der Vertizes $a_0, \dots, a_d$ eines Simplex, sei die i-te Fläche dadurch festgelegt, dass sie den Vertex a_i nicht enthält. Die Crouzeix-Raviart Elemente $\theta_{s,i}$ sind gegeben durch

$$\theta_{s,i}(x) = d\left(\frac{1}{d} - \lambda_i(x)\right), \quad 0 \le i \le d,$$

wobei die Schwerpunkts-Koordinaten $\lambda_i(x)$ des Simplex s durch

$$\lambda_i(x) = 1 - \frac{(x - a_i) \cdot n_i}{(a_k - a_i) \cdot n_i} \in \mathbb{R}$$

gegeben sind (mit beliebigem Hilfs-Vertex $a_k \neq a_i$) und stellen also eine lokale $\mathbb{P}^1$ Interpolation auf Ω dar.

1. Zeigen Sie, dass die Definition der λ_i tatsächlich unabhängig von der Wahl des Hilfs-Vertex $a_k \neq a_i$ ist.

2. Sei F_i die i-te Fläche eines Simplex s. Zeigen Sie, dass $\theta_{s,i}\big|_{F_i} = 1$ und $\theta_{s,i}(a_i) = 1 - d$.
3. Zeigen Sie, dass die CR-Elemente bezüglich des Mittelwerts

$$\sigma_i(p) = \frac{1}{|F_i|} \int_{F_i} p$$

einer Funktion auf der i-ten Seitenfläche F_i eines Simplex s, die Eigenschaft $\sigma_i(\theta_{s,j}) = \delta_{ij}$ erfüllen. Sie dürfen sich hierbei auf den drei-dimensionalen Fall beschränken.

4. Zeigen Sie, dass $g(x)$ für $d \geq 2$ im Allgemeinen unstetig ist.

5 Punkte

Übung 3 Implementierung des Crouzeix-Raviart Elements

Im Ordner *dune-npde/uebungen/uebung07*, der aktuellen *dune-npde* Moduls finden Sie eine etwas vereinfachte Version des Programms, welches Ihnen für die praktische Aufgabe der letzten Übung zur Verfügung gestellt wurde. Diese Variante bearbeitet ausschließlich den zwei-dimensionalen Fall und verwendet ausschließlich die P_1-Basis. Eine sehr einfach Implementierung dieser Basis, welche der *dune-localfunctions* Schnittstelle genügt, finden Sie in der Datei *dune-npde/dune/npde/finiteelement/p12dbasis.hh*.

Ihre Aufgabe ist es die *Crouzeix-Raviart* Elemente aus Aufgabe 2 mit der selben Schnittstelle zu implementieren. Verifizieren Sie Ihre Implementierung indem Sie die Interpolation auch für diese Elemente durchführen. Vergleichen Sie die Konvergenzraten.

8 Punkte