

ÜBUNG 1 BRAMBLE-HILBERT IN 1D

Sei $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $w \in H^2(\Omega)$. Es seien x_k die Vertices einer Triangulierung von Ω mit $x_k = a + \sum_{i=1}^k h_i$, $k = 0 \dots N$ und $h_k > 0$ so dass $x_0 = a$ und $x_N = b$. Die stückweise linear interpolierende Funktion v zu w erfülle $v(x_i) = w(x_i)$ für $(i = 0 \dots N)$. Es sei $\hat{\Omega} = [0, 1]$ das Referenzelement und $\mu_k : \hat{\Omega} \rightarrow [x_{k-1}, x_k]$ die zugehörige Transformation zu jeder Gitterzelle.

Zeigen Sie, dass für $e(x) := w - v$ und $\hat{e}_k(\hat{x}) := e(\mu_k(\hat{x}))$ gilt

$$|\hat{e}_k|_{1, \hat{\Omega}} \leq \|\partial_{\hat{x}\hat{x}} \hat{e}_k\|_{0, \hat{\Omega}}$$

und mit $h = \max_{1 \leq k \leq N} \{h_k\}$ auch

$$\|e\|_{1, \Omega}^2 \leq h^2(h+1) \|\partial_{xx} w\|_{0, \Omega}^2.$$

5 Punkte

ÜBUNG 2 INTERPOLATION AUF DREIECK

Sei $v \in C^2(K)$ und K ein Dreieck mit Vertices $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$. Mit ϕ_i für $i = 1, 2, 3$ seien die $P^1(K)$ Basis-Funktionen bezeichnet, welche $\phi_i(a_j) = \delta_{ij}$ erfüllen. Die Länge der größten Seite von K sei durch h_K , der kleinste Winkel durch τ_K gegeben.

Die P^1 Interpolations-Funktion hat die Form

$$\Pi v(x) = \sum_{i=1}^3 v(a_i) \phi_i(x).$$

Beweisen Sie die Abschätzungen:

1.

$$\|v - \Pi v\|_{L_\infty(K)} \leq \frac{1}{2} h_K^2 \|D^2 v\|_{L_\infty(K)}$$

2.

$$\|\nabla(v - \Pi v)\|_{L_\infty(K)} \leq \frac{3}{\sin \tau_K} h_K \|D^2 v\|_{L_\infty(K)}$$

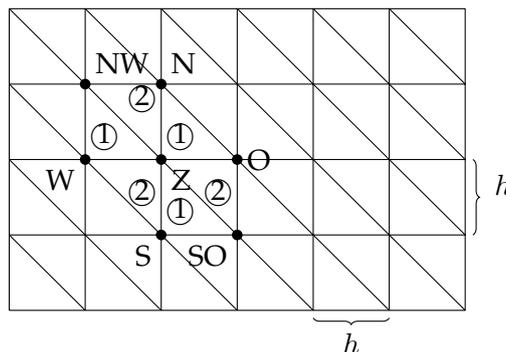
5 Punkte

ÜBUNG 3 STEIFIGKEITSMATRIX

Zu lösen sei das homogene Laplace-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit P_1 Elementen auf dem Gitter:



Die Basisfunktionen sehen an allen (inneren) Knoten gleich aus, dementsprechend sind auch die Zeilen der Steifigkeitsmatrix alle identisch (wenn man die Randknoten mit betrachtet). Um die Matrix aufzustellen, genügt es deshalb nur einen Knoten Z zu betrachten. Die Nachbarn dieses Knotens seien relativ als N, O, SO, S, W, NW bezeichnet.

Bestimmen Sie (zu einer zu wählenden Nummerierung) explizit die Matrixeinträge einer Zeile der Steifigkeitsmatrix, welche zu einer Testfunktion an einem inneren Gitterknoten gehört. Drücken Sie die daraus resultierende Kopplung als *Differenzenstern* analog zu den Finite-Differenzen Verfahren aus.

5 Punkte

ÜBUNG 4 ELLIPTISCHER-OPERATOR FÜR PDELAB

Im Verzeichnis *uebungen/uebung08* des aktuellen *dune-mpde* Moduls befindet sich ein Programm, welches das Laplace-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 & x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit reinen Dirichlet-Bedingungen unter Verwendung von P^k Finiten-Elementen auf einem konformen Dreiecks-Gitter löst. Das Problem-Gebiet wurde dabei als $\Omega = [0, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ gewählt. Es ist Ihre Aufgabe, den Operator so zu modifizieren, dass er schließlich Probleme der Form

$$\begin{aligned} -\nabla(k(x)\nabla u(x)) &= f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega_D, \\ -k(x)\nabla u(x) \cdot n(x) &= j(x), & x \in \partial\Omega_N \end{aligned}$$

für skalare Funktionen $k(x), f(x), j(x)$ lösen kann.

Erstellen sie für alle folgenden Fälle eine VTK-Datei der Lösung und berechnen sie deren L_2 -Norm.

1. Wählen Sie zunächst $\partial\Omega_D = \{(x, y) | x = 0 \vee x = 2\}$ und $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$. Außerdem sei $g(x, y) = x$ und $j(x, y) = 0$. Die unstetige Funktion k sei gegeben durch:

$$k(x, y) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \wedge y > 1 \\ 10^{-5} & x > 1 \wedge y > 1 \\ 1 & x > 1 \wedge y \leq 1 \\ 10^{-5} & x \leq 1 \wedge y \leq 1 \end{cases}$$

und f verschwinde auf ganz Ω .

2. Beschreiben Sie qualitativ das Verhalten der Lösung, wenn gegenüber der vorherigen Angabe, die Funktion j nicht verschwindet, also z.B. $j(x, y) = 1$.
3. Beschreiben Sie qualitativ das Verhalten der Lösung, wenn gegenüber der vorherigen Angabe, der Quell-Term als

$$f(x, y) = \exp^{-4((x-1)^2 + (y-1)^2)}$$

gewählt wird und wieder $j(x, y) = 0$ gilt.

10 Punkte