ÜBUNG 1 WEIHNACHTSAUFGABE

Die Anwendung von konformen Finite-Elemente Diskretisierungen auf die hyperbolische Konvektionsgleichung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\beta u(x)) &= 0, \quad \forall x \in \Omega \\ u(x) &= g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega_D = \{x \in \partial\Omega \mid \beta \cdot n(x) < 0\} \end{aligned}$$

mit konstantem Geschwindigkeitsfeld $\beta \in \mathbb{R}^d$ führt auf ein instabiles numerisches Verfahren, welches im Allgemeinen nicht (oder nicht gegen die richtige Lösung) konvergieren wird.

Aus diesem Grund werden solche Probleme oft durch stabilisierte Formulierungen vom Typ einer Konvektions-Diffusions-Gleichung approximiert. In diesem Fall also

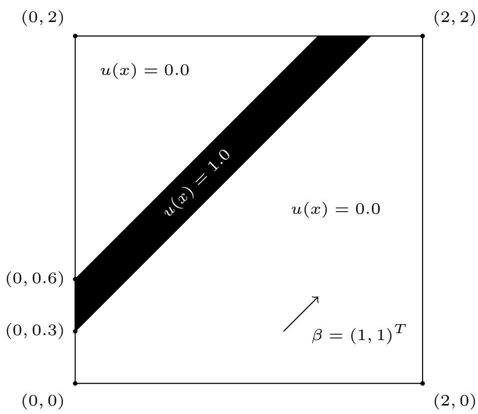
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\beta u(x)) - \epsilon \Delta u(x) &= 0, \quad \forall x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega_D = \{x \in \partial\Omega \mid \beta \cdot n(x) < 0\} \\ -\epsilon \nabla u(x) \cdot n(x) &= 0, \quad \forall x \in \partial\Omega_N = \partial\Omega \backslash \partial\Omega_D \end{aligned}$$

mit $\epsilon \to 0$ (bzw. möglichst klein). In dieser Aufgabe soll die Qualität solcher stabilisierten Formulierungen an einem Testproblem untersucht werden.

Im Testproblem sei $\beta = (1,1)^T$ und die Randbedingungen auf dem Dirichlet-Rand $\partial\Omega_D$ seien durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \mid 0.6 >= y >= 0.3 \\ 0 & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Die Lösung dieses Problems ist unstetig und in der folgenden Abbildung dargestellt:



Im Verzeichnis *uebungen/uebung09* des aktuellen *dune-npde* Moduls ist das Lösen der stabilisierten Gleichung mit konformen FE bereits implementiert.

1. Untersuchen Sie sowohl optisch als auch mittels der $L2$-Fehlernorm die Güte der Lösung für verschiedene Werte von ϵ und verschiedene Approximationsordnungen p der FE-Basis.

2. Implementieren Sie eine Funktion, welche (wenigstens näherungsweise) den maximalen und minimalen Wert der Lösung berechnet. Untersuchen sie damit das Verhalten der *Über- und Unterschwinger* (Werte > 1 und < 0) in Abhängigkeit von ϵ und p.

3. Eine andere Variante der Stabilisierung ist die *Streamline-Diffusion* Methode. Hier modifiziert man das hyperbolische Problem in der schwachen Formulierung gemäß:

$$\begin{aligned} &\forall v \in V: \\ &-\int_\Omega (\beta u(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega_N} (\beta u(x)) \cdot v(x) n(x)\, dx + \int_\Omega \delta(\beta \cdot \nabla u(x))(\beta \cdot \nabla v(x))\, dx = 0. \end{aligned}$$

Motivieren Sie den Namen dieses Verfahrens und implementieren Sie es im verwendeten lokalen Operator, so dass dieses optional angewendet werden kann. Führen Sie die Teilaufgaben 1. und 2. auch für dieses Verfahren durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.

4. Untersuchen Sie weitere Möglichkeiten die Lösung zu verbessern. Stellen Sie sich hierzu die folgenden Fragen:

   - Ist die Wahl (Implementierung) der Randbedingung überhaupt sinnvoll? Wie könnte man diese modifizieren?
   - Ist die Wahl des Gitters für dieses Problem sinnvoll, oder könnte (mit Hilfe von `gmsh`) ein besser an das Problem angepasstes Gitter erzeugt werden?

20 Punkte