IWR, Universität Heidelberg | Sommersemester 2010
Aufgabenblatt 1 | 21. April 2010

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Aspekte der Modellierung und Simulation in den Neurowissenschaften

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 28. April 2010 in der Übung

Übung 1 Einführung in Octave (5 Punkte)

1. In der Vorlesung und den Übungen haben Sie die das Mathematik-System *Octave* kennengelernt. In dieser Aufgabe sollen einige kleine Fingerübungen gelöst werden.

   Legen Sie eine Matrix und einen Vektor an:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 16 & 33 & 50 & 67 \\ 4 & 15 & 31 & 44 \\ 10 & 29 & 63 & 97 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

   und

   - Lösen Sie das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$,
   - Berechnen Sie $A^T A$,
   - Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A.

2. Plotten Sie die Funktion $f(x,y) = exp(-0.1 \cdot x^2 - 0.25 \cdot y^2)$ in den Wertebereichen $I_x = [-3,3], I_y = [-4.25, 4.25]$ mit einem Spacing von 0.1 in $x-$ und 0.3 in y-Richtung mit Gitternetzlinien. Exportieren Sie den Plot als *eps*-, *png*- oder *pdf*-Datei.

3. Berechnen Sie ein Matrix-Vector-Produkt einer (600×600)-Zufallsmatrix mit einem (600×1)-Zufallsvektor und messen Sie die verbrauchte Zeit für die

   - Verwendung der eingebauten Funktion `*`,
   - Verwendung von `for`-Schleifen.

   Führen Sie, um Messfehler auszugleichen, mehrere Durchläufe durch und vergleichen Sie die gemessenen Zeiten.

Übung 2 Ein Integrate-and-Fire Punktneuronen-Modell (5 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie ein einfaches Integrate-And-Fire Modell eines Punktneurons von Izhikevič kennengelernt. In dieser Aufgabe wird eines der einfachsten Punktneuronen-Modelle, das *Leaky Integrate and Fire*-Modell, mit Octave numerisch gelöst. Das Modell hat die Form

$$\begin{aligned} \tau_m \partial_t v(t) &= -(v(t) - v_L) + R \cdot I(t), \\ v(t) &= v_r, && \text{falls } v(t) > v_{peak}, \\ v(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Hierbei werden $v(t)$, das Potential, v_L, die synaptische Batterie und v_{peak}, der Threshold für Spike-Generierung, sowie v_r, der Reset-Wert des Potentials, in $[mV]$ gemessen, $I(t)$ ist ein eingeprägter Strom in nA, R ein Wiederstand in $MOhm$ und $\tau_m = R \cdot C$ eine Zeitkonstante in ms, die aus dem Produkt des Wiederstandes mit einer Kapazität C (in pF) berechnet wird und die die dynamischen Vorgänge des Systems hinreichend auflöst. Die Modellzeit t hat die Einheit ms.

1. Implementieren Sie das Forward-Euler-Verfahren für das Modell mit Octave und den Parametern $R = 10,\ \tau_m = 30,\ t_{end} = 1000,\ dt = 0.1,\ v_L = 10, v_{peak} = 65$. Der Strom soll konstant sein, $I(t) = I_0 = 10$. Erzeugen Sie Plots „Potential über Zeit" und „Strom über Zeit" und exportieren Sie diese als *eps*-, *png*- oder *pdf*-Datei.

2. Welchen Effekt beobachten Sie, wenn Sie den Strom auf $3\,nA$ erniedrigen? Haben Sie eine Erklärung hierfür?

3. Implementieren Sie die Messung der *Mean Firing Rate* θ, die wie folgt berechnet werden kann:

$$\int_{v_r}^{v_{peak}} \frac{dV}{v_{eq} - v} = \int_0^T \frac{dt}{\tau_m} \quad \longrightarrow \quad T = -\tau_m ln\left[\frac{v_{eq} - v_{peak}}{v_{eq} - v_r}\right] \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{1}{T}.$$

   Hier bei ist das Gleichgewichtspotential v_{eq} gegeben durch $v_{eq} = V_L + R \cdot I$. Für v_{peak} kann der theoretische Wert eingesetzt werden, was die analytische Mean Firing Rate ergibt. In der numerischen Simulation wird das v, zu dem der Spike generiert wird, allerdings von v_{peak} abweichen, was die experimentelle Mean Firing Rate ergibt. Messen Sie beide Werte für das Experiment und vergleichen Sie.

4. Messen Sie nun über die Mean Firing Rate die Konvergenzrate des Forward Euler Verfahrens. Halbieren Sie dazu sukzessive die Schrittweite dt und messen Sie Abweichung zum theoretischen Wert. Fertigen Sie wiederum Plots an, die sie exportieren. Welches Konvergenzverhalten beobachten Sie?

5. Implementieren Sie einen zeitabhängigen Strom $I(t)$, beim dem auf einen Grundstrom von $I_0 = 1.2nA$ vier Sinus-Moden $sin(\omega t)$ mit zufälliger Frequenz ω addiert werden. Fertigen Sie wiederum Plots wie in Teilaufgabe (1) an.