

Übungen zur Vorlesung
**Mathematische Aspekte der Modellierung und Simulation in den
Neurowissenschaften**

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 25. Mai 2010 in der Übung

Übung 10 Gleichgewichte einer gewöhnlichen DGL (3 Punkte)

Gegeben seien die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -1 + x^2, \\ \dot{x} &= x - x^3.\end{aligned}$$

Skizzieren Sie für jede der beiden Gleichungen schematisch das Phasenportrait (\dot{x} über x). Bestimmen Sie die Gleichgewichte und entscheiden Sie, ob es sich um stabile oder instabile Gleichgewichte handelt.

Übung 11 Phasenraumportraits und Nullklinen mit Octave (5 Punkte)

Gegeben seien die folgenden beiden Differentialgleichungssysteme:

$$\begin{aligned}x' &= y \cdot (1 - x) \\ y' &= -y + 2y \cdot (1 - x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x' &= \sin(x + y) + \cos(x + y) \\ y' &= \sin(x - y) - \cos(x - y).\end{aligned}$$

Erstellen Sie für beide Systeme Plots des Richtungsfeldes (Octave-Funktion `quiver`) und versuchen Sie, die Gleichgewichtspunkte zu erkennen. Verwenden Sie für das erste System ein Spacing von `-1.5:0.1:1.5` für x - und y -Achse, für das zweite eines mit `-4:0.1:4`.

Zeichnen Sie danach auch die Nullklinen (für eine Gleichung $x' = f(x, y)$ sind das die Kurven mit $f(x, y) = 0$) im gleichen Plot ein. Hier kann Ihnen die Octave-Funktion `contour` helfen.

Übung 12 Van-der-Pol-Oszillator (7 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= v - v^3 - w + I_{app} \\ \tau \dot{w} &= v.\end{aligned}$$

Dieses Modell ist ein vereinfachtes Fitzhugh-Nagumo-Modell.

Bestimmen Sie für dieses Modell mit Octave die Nullklinen. Verwenden Sie dabei Parameter $\tau \gg 1$ und $I_{appl} = 0$.

Im nächsten Schritt lösen Sie das System numerisch. Verwenden Sie das Forward-Euler-Verfahren und eine Stromschwelle, die nach einer kurzen Zeit ein, dann wieder ausgeschaltet wird. Als Startwerte x_0, y_0 verwenden Sie den Schnittpunkt der Nullklinen.

Auf Wikipedia gibt es einen Artikel über das Fitzhugh-Nagumo-Modell. In diesem finden Sie eine Erklärung der Dynamik des Systems und der Bedeutung der Nullklinen. Versuchen Sie dieses Verhalten zu reproduzieren, fertigen Sie einen gemeinsamen Plot mit Nullklinen und der berechneten Trajektorie an, wie er im genannten Artikel zu finden ist.