Übungen zur Vorlesung

# Mathematische Aspekte der Modellierung und Simulation in den Neurowissenschaften

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 01. Juni 2010 in der Übung

---

## Übung 13 Sattelpunktsbifurkation (3 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = a + x^2,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter sei. Dieses Modell ist die Normalform für das quadratische Integrate-and-Fire-Modell, das wir in den Übungen schon angesprochen haben.

Skizzieren Sie das Phasenportrait (Plots $\dot{x}$ gegenüber $x$) für die Fälle $a = -1$, $a = 0$ und $a = 0.5$ und bestimmen Sie vorhandene Gleichgewichte sowie deren Charakterisierung (stabil, instabil,...).

Skizzieren Sie dann das Bifurkations-Diagramm, d.h. den Plot der Gleichwichte $x^*$ über $a$ und entscheiden Sie, welche Zweige zu stabilen und welche zu instabilen Gleichgewichten gehören. Gibt es einen Bifurkationspunkt?

## Übung 14 Das $I_{Na,p}$-$I_K$-Modell (7 Punkte)

Ein einfaches realistisches Punkt-Neuronen-Modell ist das sogenannte $I_{Na,p}$-$I_K$-Modell. Dabei geht man davon aus, dass der in vielen anderen Modellen auftretende, das Potential beeinflussende Natrium-Kanal (s. z.B. Hodgkin-Huxley-Modell) eine sehr langsame Dynamik hat, so daß er als quasi-stationärer Prozess angesehen werden kann. Der Index $p$ im Natrium-Strom steht daher für „persistent instantaneous“. Die Dynamik des Modells wird im Wesentlichen von einem einzigen Kalium-Kanal bestimmt, und das Modell hat die Form

$$\begin{aligned} C_m \partial_t v &= -g_L(v - E_L) - g_{Na} \cdot m_\infty(v) \cdot (v - E_{Na}) - g_K \cdot n \cdot (v - E_K) + I_a, \\ \partial_t n &= \frac{n_\infty(v) - n}{\tau_n}. \end{aligned}$$

Hierbei sind $g_L, g_{Na}, g_K$ die Leitfähigkeiten von Leck-, Natriumionen- und Kaliumionen-Strom, $E_{(\cdot)}$ die entsprechenden Batterien, $C_m$ eine Kapazität und $\tau_n$ die Zeitkonstante des Kalium-Kanals. Die Funktion $n$ modelliert den Kalium-Kanal und ist mit der Potential-Gleichung gekoppelt. $I_a$ ist ein applizierter Strom und $n_\infty$, $m_\infty$ sind die Gleichgewichtswerte des Kalium-Kanals $n(t)$ und des nicht system-relevanten Natrium-Kanals $m(t)$.

1. Berechnen Sie von Hand die $v$- und $n$-Nullklinen.

2. Nun wollen wir für dieses 2-Komponenten-Modell Richtungsfelder, Nullklinen und Gleichgewichtspunkte mit Octave (oder einem anderen Mathematik-Algebra-System) bestimmen. Auf der Homepage, bei der Octave-Einführungsseite finden Sie dazu ein neues Beispiel, wie für ein dynamisches System mit 2 Komponenten Nullklinen, Richtungsfelder und einige Beispiel-Trajektorien geplottet werden können.

Probieren Sie dieses Beispiel aus, und verwenden Sie es anschließend, für obiges Modell mit den Parametern $C_m = 1, E_L = -80, g_L = 8, E_{Na} = 60, g_{Na} = 20, E_K = -90, g_K = 10, \tau_n = 1$ sowie

$$m_\infty(v) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-20-v}{15}\right)},$$

$$n_\infty(v) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-25-v}{5}\right)}.$$

Testen Sie Ihr Programm für $I = 0, 5, 40$, und exportieren Sie Plots der Simulation. Geben Sie die in den Plots auftretenden Gleichgewichte an und versuchen Sie an Hand des Plots, die Gleichgewichte zu charakterisieren (Betrachtung der Richtungspfeile). Beachten Sie, daß sie passende Parameter-Intervalle für den Plot verwenden, d.h. für das Potential $v$ ungefähr $[-90, 50]mV$ und für den Kanal $[0, 1]$.

3. Können Sie die $n$-Nullkline, die Sie in 1) theoretisch bestimmt haben, im Richtungsfeld-Plot identifizieren? Welche Form hat die Kurve theoretisch, und stimmt Ihr numerisches Ergebnis qualitativ?

4. Mit Erhöhen des applizierten Stroms $I$ sollte sich das Verhalten des Systems qualitativ verändern. Können Sie erkennen, welcher Bifurkationstyp vorliegt? Wie ändert sich die Anzahl der Gleichgewichte?