Übungen zur Vorlesung

Mathematische Aspekte der Modellierung und Simulation in den Neurowissenschaften

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 08. Juni 2010 in der Übung

Übung 15 Stabilität von 2D-Systemen (5 Punkte)

Gegeben sei ein reelles, lineares, zweidimensionales System

$$\dot{x} = A \cdot x$$

mit $x \in \mathbb{R}^2$ und $A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Die Matrix A habe die beiden Eigenwerte $\lambda_{1/2} \neq 0$ als Nullstellen des charakteristischen Problems $det(A - \lambda I)$. A ist somit invertierbar.

Wir nehmen an, daß das System einen kritischen Punkt besitze. Die folgende Tabelle zeigt die möglichen Stabilitätseigenschaften des Systems an diesem Punkt.

Eigenwerte	Typ des kritischen Punkts	Stabilität
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	uneigentlicher Knoten	instabil
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	Sattelpunkt	instabil
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	uneigentlicher Knoten	asympt. stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	uneigentlicher oder eigentlicher Knoten	asympt. stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	uneigentlicher oder eigentlicher Knoten	instabil
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C},\ Re(\lambda_{1/2}) > 0$	Spiralpunkt	instabil
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C},\ Re(\lambda_{1/2}) < 0$	Spiralpunkt	asympt. stabil
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C},\ Re(\lambda_{1/2}) = 0$	Zentrum	stabil

Bestimmen Sie für die folgenden System jeweils den Typ des kritischen Punkts und seine Stabilitätseigenschaft:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen die Lösung analytisch oder numerisch bestimmen.

Übung 16 Transformation auf Normalform (5 Punkte)

Gegeben sei ein eindimensionales dynamisches System mit der Gleichung

$$\dot{V} = a \cdot (V - V_{rest}) \cdot (V - V_{thresh}).$$

Bestimmen Sie den Zusammenhang zur topologischen Normalform der Sattelknoten-Bifurkation, gegeben durch

$$\dot{V} = c \cdot (b - b_{sn}) + a \cdot (V - V_{sn})^2.$$

Stellen Sie dazu die Variablen V_{rest}, V_{thresh} in Abhängigkeit von V_{sn}, c, b und b_{sn} dar. Der Parameter a ist in beiden Gleichungen identisch.

Welche Beziehung müssen b und b_{sn} erfüllen, damit die Transformation gelingt?

Übung 17 Bifurkationen (5 Punkte)

1. Gegeben sei das lineare dynamische System

$$\dot{x} = I - x$$

   mit dem reellen Bifurkationsparameter I. Entscheiden Sie, ob das System einen Bifurkationspunkt besitzen kann. Skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm und Richtungspfeile darin.

2. Finden Sie für die folgenden eindimensionalen dynamischen Systeme die Bifurkationspunkte und skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm mit Richtungsfeldern:

$$\begin{array}{ll} \text{Pitchfork-Bifurkation:} & \dot{x} = Ix - x^3, \\ \text{Transkritische Bifurkation:} & \dot{x} = Ix - x^2. \end{array}$$

3. Betrachten Sie das folgende dynamische System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= Ix + x - x^3. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie für $I = 0$ die stationären Punkte und deren Stabilität. Skizzieren Sie das Phasenportrait des Systems für $I = 0$, $I < 0$ und $I > 0$. Ist das System strukturell stabil oder treten Bifurkationen auf?

4. Transformieren Sie das in der Vorlesung vorgestellte Andronov-Hopf-Bifurkations-Modell

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(I - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= x + y(I - (x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

   auf Polarkoordinaten. Skizzieren Sie dann das (dreidimensionale (!)) Bifurkationsdiagramm des Systems.