Übungen zur Vorlesung

Modellierung und Simulation in den Neurowissenschaften

http://conan.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/numsimneuro_ss2011

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 25. Mai 2011 in der Übung

Übung 7 Integrate-and-Fire Neuron mit Spike Frequency Adaption (10 Punkte)

In dieser Übung wird das Leaky Integrate-and-Fire-Modell um einen K^+-Kanal erweitert. Dieser erzeugt einen hyperpolarisierenden Strom, der das Spiken verzögert, und somit die Spike-Frequenz adaptieren kann. Daher wird dieses Modell IFA abgekürzt, „Integrate-and-Fire mit Adaption“. In physikalischer Schreibweise lautet es:

$$\begin{aligned}
C_m \partial_t v(t) &= -G_L(v - v_{rest}) - g(v - E_K) + I/A,\\
\tau_a \partial_t g(t) &= -g\\
v(0) = v_0, &\quad g(0) = g_0,\\
\text{if } v \geq v_{thresh} &: \begin{cases} v \longrightarrow v_{reset},\\ g \longrightarrow g + \triangle g. \end{cases}
\end{aligned}$$

Hierbei ist I/A die Eingangstromdichte für eine Membran mit Gesamt-Oberfläche $A\,[cm^2]$, C_m die spezifische Membran-Kapazität (Einheit $[\mu F/cm^2]$), G_L die spezifische Membran-Leitfähigkeit (Einheit $[1/(k\Omega cm^2)]$), g die Variable des Kalium-Kanals (hier eine spezifische Leitfähigkeit in $[1/(k\Omega cm^2)]$), E_K die Kalium-Batterie in $[mV]$, τ_a die Zeitkonstante des Kalium-Kanals in $[ms]$ und $\triangle g$ ein Offset für die Kalium-Variable. Zu jeder Zeit, an dem ein Spike erzeugt wird, erhöht der Offset die Kalium-Leitfähigheit. Der hemmende Strom akkumuliert sich so auf und verzögert das Spiking.

Man kann nun mit dem spezifischen Membran-Widerstand $R_m = 1/G_L$ multiplizieren, g reskalieren und erhält mit den Startbedingungen $v(0) = v_0$ und $g(0) = g_0$:

$$\begin{aligned}
\tau_m \partial_t v(t) &= -(v - v_{rest}) - g(v - E_K) + R\,I,\\
\tau_a \partial_t g(t) &= -g\\
\text{if } v \geq v_{thresh} &: \begin{cases} v \longrightarrow v_{reset},\\ g \longrightarrow g + \frac{\triangle g}{G_L}. \end{cases}
\end{aligned}$$

mit der Membran-Zeitkonstante $\tau_m = C_m \cdot R_m$ in $[ms]$ und dem gesamten Membran-Widerstand $R = R_m/A$ nin $[M\Omega]$. Der Strom ist nun der gesamte in die Zelle applizierte Strom in $[nA]$.

Implementieren Sie das (reskalierte) Modell mit Hilfe von *Octave* und einem Verfahren Ihrer Wahl. Verwenden Sie die Parameter $t = 1000\,ms$, $dt = 0.1\,ms$, $v_{rest} = -65\,mV$, $R = 10.0$, $v_{reset} = -65\,mV$, $v_{thresh} = -50.0\,mV$, $\tau = 15\,ms$. Startwerte sind $v_0 = v_{rest}$ und $g_0 = 0.0$. Der Kalium-Kanal hat eine Batterie von $E_K = -85\,mV$ und von $t = 50\,ms$ bis $t = 200\,ms$ wird ein Strom von $I = 4\,nA$ appliziert.

Erzeugen Sie dann Plots des Potentials und der Kalium-Variablen g über der Zeit t für die Parameter-Kombinationen $\{\tau_a, \triangle g/G_L\} = \{100, 0.1\},\ \{100, 0.5\},\ \{500, 0.1\},\ \{500, 0.5\}$ und versuchen Sie knapp zu interpretieren, wie sich das Ändern der Zeitkonstante τ_a des Kalium-Kanals und des Kalium Offsets $\triangle g$ qualitativ auswirken.

Übung 8 Leaky IF mit adaptivem Backward Euler und Crank-Nicolson (5 Punkte)

Auf dem letzten Übungsblatt haben wir das Leaky Integrate and Fire-Modell,

$$\begin{aligned} \tau_m \partial_t v(t) &= -(v(t) - v_L) + R \cdot I(t), & \\ v(t) &= v_{reset}, & \text{falls } v(t) > v_{threshold}, \\ v(0) &= v_0, & \end{aligned}$$

mit den Verfahren *Backward Euler* (BE) und *Crank-Nicolson* (CN) gelöst. Zur Bedeutung der Parameter im Modell siehe das erste und dritte Übungsblatt. In dieser Aufgabe sollen BE und CN um eine Zeitschritt-Adaption ergänzt werden. Die Adaption basiert auf einer Fehlerschätzung des lokalen Abschneidefehlers über eine Extrapolation:

$$\eta(t_n) = \left| \frac{v^{n,1} - v^{n,2}}{2^p - 1} \right|.$$

Hierbei sind $v^{n,1}$ und $v^{n,2}$ zwei numerische Lösungen zum Zeitpunkt t_n, die ausgehend vom Zeitpunkt t_{n-1} mit den Zeitschittweiten $\kappa_1 = t_n - t_{n-1}$ und $\kappa_2 = 0.5 \cdot \kappa_2$ berechnet wurden, p ist die erwartete Konsistenz-Ordnung des Verfahrens. Für BE gilt $p = 1$, für CN $p = 2$. Mit der Extrapolation misst man den (unbekannten) lokalen Abschneidefehler eines Zeitschritt-Verfahrens zu einem festen Zeitpunkt durch Vergleich zweier numerisch berechneter Lösungen, der globale, akkumulierte Fehler kann mit dieser Methode nicht geschätzt werden.

Ein adaptiver Algorithmus wäre zum Beispiel

1. Rechne einen Zeitschritt von t_{n-1} bis t_n mit den Zeitschrittweiten κ_1 und κ_2 wie oben.
2. Berechne $\eta(t_n)$.
3. Falls $\eta(t_n) > \varepsilon$, halbiere den Zeitschritt, und beginne erneut bei 1).
4. Falls $\eta(t_n) < \alpha \cdot \varepsilon$, vergröbere die Zeitschrittweite für den nächsten Zeitschritt. Da man bei BE eine Verdopplung des Fehlers η bei Verdopplung der Zeitschrittweite erwartet, bei CN hingegen eine Vervierfachung, kann man für BE $\alpha = 0.5$ und für CN $\alpha = 0.25$ setzen. Gehe zu Schritt 5).
5. Rechne den nächsten Zeitschritt mit der aktuell eingestellten Zeitschrittweite κ.

Es gibt hier natürlich Alternativen, zum Beispiel kann man basierend auf der erwarteten Konsistenz-Ordnung des Verfahrens den Zeitschritt optimal adaptieren.

Für den Fall eines konstanten angelegten Stroms existiert für das Modell eine analytische Lösung:

$$v(t) = v_{steady} + (v_0 - v_{steady}) \cdot \exp\{-t/\tau_m\}$$

mit der Gleichgewichtslage $v_{steady} = v_L + R \cdot I = v_{rest} + R \cdot I$. Die Zeit t in der analytischen Lösung läuft ab dem letzten Rücksetz-Zeitpunkt (zu dem ein Spike getriggert wurde) und v_0 ist der initiale Potential-Wert zu dieser Zeit. Mit Hilfe der analytischen Lösung können wir die Effizienz der adaptiven Verfahren bewerten, indem den Aufwand (Echtzeit in s) betrachten, den wir benötigen, um den punktweisen Fehler $|e| = |v(t_n) - v^n|$ zu einem Zeitpunkt t_n unterhalb einer gewünschten Tolerenz ϵ zu halten. Wir vergleichen uniforme Lösungen (Vorgabe der Zeitschrittweite κ) und adaptive Lösungen (Vorgabe der lokalen Toleranz ε für η).

1. Implementieren Sie für das BE- und CN-Verfahren vom letzten Übungsblatt obigen adaptiven Algorithmus oder eine eigene Alternative mit Octave. Als Parameter verwenden Sie wiederum $R = 10$, $\tau_m = 10$, $v_L = -65$, $v_{threshold} = -50$ und $v_{reset} = -65$. Der Startwert des Potentials ist $v(0) = v_0 = v_L$ und der angelegte Strom soll konstant sein, $I(t) = I_0 = 2.0$.

2. Erstellen Sie nun für beide Verfahren Plots „Fehler zu einem festen Zeitpunkt“ gegenüber „Aufwand“ (verbrauchte Rechenzeit in s) und diskutieren Sie, ob sich die adaptive Variante gegenüber der uniformen lohnt. Für die uniforme Variante können Sie die Rechnungen vom letzten Blatt mit Zeitmessung wiederholen. Passen Sie auf, dass Sie immer zum selben Zeitpunkt auswerten, den Messzeitpunkt und die Toleranzen ε des adaptiven Verfahrens sowie die Zeitschrittweiten der uniformen Läufe dürfen Sie beliebig wählen.