IWR, Universität Heidelberg — Sommersemester 2011
Aufgabenblatt 9 — 22. Juni 2011

Übungen zur Vorlesung

Modellierung und Simulation in den Neurowissenschaften

http://conan.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/numsimneuro_ss2011

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 29. Juni 2011 in der Übung

Übung 18 Bifurkationen (5 Punkte)

1. Gegeben sei das lineare dynamische System

$$\dot{x} = I - x$$

mit dem reellen Bifurkationsparameter I. Dies ist die Normalform des Leaky-Integrate-and-Fire Neurons. Entscheiden Sie, ob das System einen Bifurkationspunkt besitzen kann. Skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm mit Richtungspfeilen.

2. Finden Sie für die folgenden eindimensionalen dynamischen Systeme die Bifurkationspunkte und skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm mit Richtungsfeldern:

$$\begin{array}{ll} \text{Pitchfork-Bifurkation:} & \dot{x} = Ix - x^3, \\ \text{Transkritische Bifurkation:} & \dot{x} = Ix - x^2. \end{array}$$

3. Betrachten Sie das folgende dynamische System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= Ix + x - x^3. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für $I = 0$ die stationären Punkte und deren Stabilität. Skizzieren Sie das Phasenportrait des Systems für $I = 0$, $I < 0$ und $I > 0$. Ist das System strukturell stabil oder treten Bifurkationen auf?

Übung 19 Integrate-and-Fire-Neuron mit Runge-Kutta-Verfahren (10 Punkte)

In den Übungen haben wir das *Leaky Integrate and Fire*-Modell

$$\begin{aligned} \tau_m \partial_t v(t) &= -(v(t) - v_L) + R \cdot I(t), & \\ v(t) &= v_{reset}, & \text{falls } v(t) > v_{threshold}, \\ v(0) &= v_0 & \end{aligned}$$

ausführlich behandelt und mit den Verfahren *Forward Euler* (FE), *Backward Euler* (BE) und *Crank-Nicolson* (CN) gelöst. Zur Bedeutung der Parameter im Modell siehe das erste Übungsblatt.

Für den Fall eines konstanten angelegten Stroms kann eine analytische Lösung angegeben werden:

$$v(t) = v_{steady} + (v_0 - v_{steady}) \cdot \exp\{-t/\tau_m\}$$

mit der Gleichgewichtslage $v_{steady} = v_L + R \cdot I = v_{rest} + R \cdot I$. Die Zeit t in der analytischen Lösung läuft ab dem letzten Rücksetz-Zeitpunkt (zu dem ein Spike getriggert wurde) und v_0 ist der initiale Potential-Wert zu dieser Zeit. Mit Hilfe der analytischen Lösung können wir das Konvergenz-Verhalten numerischer Verfahren analysieren, also wie schnell sich der Fehler $|e| = |v - v^h|$ zu einem bestimmten Zeitpunkt bei Verkleinerung der Zeitschrittweite reduziert.

In der Vorlesung haben Sie (explizite) Runge-Kutta-Verfahren verschiedener Ordnungen kennengelernt, die wir in dieser Aufgabe untersuchen wollen.

1. Implementieren Sie ein explizites Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung (RK4) für das Modell und verwenden Sie die Parameter $R = 10,\ \tau_m = 10,\ v_L = -65,\ v_{threshold} = -50$ und $v_{reset} = -65$. Der Startwert des Potentials sei $v(0) = v_0 = v_L$. Der Strom soll konstant sein, $I(t) = I_0 = 2$.

   Auf der Homepage wird Ihnen eine Implementierung der Verfahren FE, BE und CN bereitgestellt. Vergleichen Sie nun für diese drei Verfahren und RK4 die Konvergenzrate, in dem Sie den Fehler zu einem festen Zeitpunkt betrachten (absolute Differenz der analytischen Lösung und des numerischen Potentials) und gleichzeitige die Zeitschrittweite κ halbieren, z.B. $\kappa = 0.1,\ 0.05,\ 0.025,\ 0.0125,\ 0.00625,\ 0.003125$. Passen Sie auf, dass Sie immer zum selben Zeitpunkt auswerten, den Messzeitpunkt dürfen Sie aber beliebig wählen.

2. Exportieren Sie einen doppelt-logarithmischen Plot „Fehler“ über „Zeitschrittweite“, in dem Sie die Werte aller vier Verfahren eintragen und bewerten Sie, wie die Verfahren den Fehler reduzieren. Können Sie in den Plots die Konvergenzrate ablesen?

3. Implementieren Sie nun ein (explizites) Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 6 (RK6) und wieder holen Sie die Schritte aus den Teilaufgaben 1) und 2).