IWR, Universität Heidelberg | Sommersemester 2012
Aufgabenblatt 6 | 06. Juni 2012

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Aspekte der Neuronenmodellierung und Simulation

http://conan.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/numsimneuro_ss2012

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 13. Juni 2012 in der Übung

Übung 10 Gleichgewichte einer gewöhnlichen DGL (3 Punkte)

Gegeben seien die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = -1 + x^2,$$
$$\dot{x} = x - x^3.$$

Skizzieren Sie für jede der beiden Gleichungen schematisch $\dot{x}$ über x. Bestimmen Sie daraus die möglichen Gleichgewichte und entscheiden Sie, ob es sich um stabile oder instabile Gleichgewichte handelt.

Übung 11 Phasenräume in Octave (5 Punkte)

Der Winkel y eines ungedämpften Pendels der Länge $l = 1$, das von einer Kraft $f(t) = sin(5t)$ angetrieben wird, kann mit einer ODE zweiter Ordnung beschrieben werden:

$$\begin{aligned} y'' &= -sin(y) + f(t), \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die Kraft $f(t)$ bewegt das Pendel aus der Ausgangslage, d.h. trotz $y'(0) = 0$ wird das System angeregt.

1. Transformieren Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung auf ein System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung (mit Komponenten y_1 und y_2).
2. Lösen Sie das System erster Ordnung mit der Octave-Funktion `ode45` im Zeitintervall $[0, 20]$. Erstellen Sie einen Plot, in dem Sie beide Komponenten des Systems über der Zeit eintragen.
3. Erstellen Sie mit Octave für den Zeitbereich $[0, 10]$ ein Phasenraumportrait der beiden Komponenten, d.h. auf der x-Achse ist y_1 aufgetragen und auf der y-Achse y_2.

Übung 12 Phasenraumportrait in Octave (2 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2\, x_1^2 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2.$$

Erstellen Sie mit Hilfe von Octave ein Phasenraumportrait, in dem Sie die Steigungen $\dot{x}_2$ und $\dot{x}_1$ als Pfeile in einem x_1-x_2-Diagramm (d.h. auf der y-Achse ist x_2, auf der x-Achse x_1 aufgetragen) eintragen. Verwenden Sie hierfür die Octave-Funktion `quiver` und einen Definitionsbereich $[-0.5, 0.5]$ für die beiden Komponenten bei einem Spacing von 0.05. Ein Beispiel zur Vorgehensweise ist auf der Homepage auf der Octave-Hilfeseite gegeben. Welche signifikanten Punkte des Plots erkennen Sie (es sollte nur einen geben)?

Übung 13 Phasenraumportraits und Nullklinen mit Octave (5 Punkte)

Gegeben seien die folgenden beiden Differentialgleichungssysteme:

$$\begin{aligned} x' &= y \cdot (1 - x) \\ y' &= -y + 2y \cdot (1 - x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x' &= sin(x + y) + cos(x + y) \\ y' &= sin(x - y) - cos(x - y). \end{aligned}$$

Berechnen Sie zunächst für beide System die x- und y-Nullklinen (für eine Gleichung $x' = f(x, y)$ sind das die Kurven mit $f(x, y) = 0$) von Hand. Erstellen Sie dann für beide Systeme ein Phasenportrait (Octave-Funktion `quiver` wie in der vorherigen Aufgabe) und versuchen Sie, die Gleichgewichtspunkte zu erkennen. Verwenden Sie für das erste System ein Spacing von `-2.0:0.1:2.0` für `x`- und `y`-Achse, für das zweite eines mit `-4:0.1:4`.

Zeichnen Sie danach auch die Nullklinen im gleichen Plot ein. Hier kann Ihnen die Octave-Funktion `contour` helfen. Stimmen diese mit Ihren berechneten Nullklinen überein?