IWR, Universität Heidelberg | Sommersemester 2012
Aufgabenblatt 8 | 20. Juni 2012

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Aspekte der Neuronenmodellierung und Simulation

http://conan.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/numsimneuro_ss2012

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 27. Juni 2012 in der Übung

Übung 17 Sattelknoten-Bifurkation (5 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = a + x^2,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter sei. Dieses Modell ist die Normalform des quadratischen Integrate-and-Fire-Modells $\tau\dot{v} = a \cdot (v - v_{rest}) \cdot (v - v_{thresh}) + RI$, in dem $a > 0$ (in $1/mV$) ein Parameter ist, der die „Anregbarkeit" des Systems steuert. Dieses Modell ist das einfachste Spike-generierende Modell (Erinnerung: Das Leaky-Integrate-and-Fire-Modell gehört nicht zu dieser Klasse!).

Skizzieren Sie $\dot{x}$ gegenüber x für die Fälle $a = -1$, $a = 0$ und $a = 0.5$, bestimmen Sie eventuell vorhandene Gleichgewichte und charakterisieren Sie diese (stabil / instabil).

Skizzieren Sie anschließend das Bifurkations-Diagramm, d.h. den Plot der Gleichwichte x^* über a und entscheiden Sie, welche Zweige zu stabilen und welche zu instabilen Gleichgewichten gehören (Tip: Betrachtung der Jacobi-Matrix). Gibt es einen Bifurkationspunkt?

Übung 18 Bifurkationen (5 Punkte)

1. Gegeben sei das lineare dynamische System

$$\dot{x} = I - x$$

   mit dem reellen Bifurkations-Parameter I. Dies ist die Normalform des Leaky-Integrate-and-Fire Neurons. Entscheiden Sie, ob das System einen Bifurkations-Punkt besitzen kann. Skizzieren Sie das Bifurkations-Diagramm mit Richtungspfeilen.

2. Finden Sie für die folgenden eindimensionalen dynamischen Systeme die Bifurkations-Punkte und skizzieren Sie das Bifurkations-Diagramm mit Richtungsfeldern:

$$\begin{aligned} &\text{Pitchfork-Bifurkation:} && \dot{x} = Ix - x^3, \\ &\text{Transkritische Bifurkation:} && \dot{x} = Ix - x^2. \end{aligned}$$

3. Betrachten Sie das folgende dynamische System (van-der-Pol-Oszillator):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= Ix + x - x^3. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie für $I = 0$ die stationären Punkte und deren Stabilität. Skizzieren Sie das Phasenportrait des Systems für $I = 0$, $I < 0$ und $I > 0$. Ist das System strukturell stabil oder treten Bifurkationen auf?