Übungen zur Vorlesung

Mathematische Aspekte der Neuronenmodellierung und Simulation

http://conan.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/numsimneuro_ss2012

Dr. S. Lang, D. Popović

Abgabe: 11. Juli 2012 in der Übung

Übung 19 Stationäre Kabel-Gleichung auf dem homogenen Zylinder (10 Punkte)

Nachdem wir in den Übungen die allgemeine, zeithängige Diffusions-Gleichung besprochen haben, wird in dieser Aufgabe ein Anwendungsbeispiel untersucht: Die lineare Kabelgleichung zur Modellierung passiver Signal-Ausbreitung auf einem zylindrischen Neuron mit konstantem Radius. Dieses eindimensionale räumliche Modell wird in Vorlesung noch genauer durchgesprochen.

Gegeben sei ein Zylinder-förmiges Neuron mit möglicherweise variierendem Radius r (in μm) und der Länge l (in μm). Im Falle $l \gg max_x \, r(x)$ kann man die räumlich-zeitliche Potentialverteilung $v(x,t)$ (gemessen in mV) durch eine eindimensionale Gleichung entlang der Zylinder-Achse, in die der Radius nur in den Material-Koeffizienten eingeht, beschreiben:

$$
\begin{aligned}
c_m(x)\,\partial_t v - \partial_x g_a(x)\,\partial_x v &= -g_m(x)\,(v - E_L), && \text{auf } \Omega = (0,l),\\
-g_a(x)\,\partial_x v &= b_N(x) && \text{auf } \partial\Omega_N,\\
v &= b_D(x) && \text{auf } \partial\Omega_D.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $c_m(x)$ (gemessen in $\mu m \cdot \mu F/cm^2$) die Kapazität pro Einheitslänge des Zylinders, $g_a(x)$ die axialen Leitfähigkeit pro Einheitslänge und $g_m(x)$ die Membran-Leitfähigkeit pro Einheitslänge sowie E_L die Leck-Batterie in mV. Der Gebietsrand ist zusammengesetzt aus Neumann-Randstücken $\partial\Omega_N$ (Einfluß- oder Ausfluß-Ränder) und Dirichlet-Rändern $\partial\Omega_D$ (Vorgabe eines Potentialwertes v), d.h. $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$. Die Membran-Leitfähigkeit $g_m(x)$ ist gegeben durch das Produkt aus dem Umfang $2\pi r$ mit der Material-spezifischen Membran-Leitfähigkeit G_m (in $1/(k\Omega cm^2)$): $g_m(x) = 2\pi r \cdot G_m$, und die axiale Leitfähigkeit durch das Produkt aus Querschnittsfläche $A = \pi r^2$ und Material-spezifischer axialer Leitfähigkeit G_a (in $1/(\Omega cm)$): $g_a(x) = \pi r^2 \cdot G_a$. Das Modell hat eine zu den biologischen Punkt-Neuronen sehr ähnliche Form, lediglich der Diffusions-Term $\partial_x\, g_a(x)\,\partial_x v$ ist neu – er modelliert die Potentialbewegung in axialer Richtung.

Wir betrachten nun die stationäre Gleichung $c_m \partial_t v = 0$ auf einem homogenen Zylinder (d.h. r, g_a und g_m sind konstant) mit $E_L = 0$. Am linken Terminal $x = 0$ sei eine Einfluß-Randbedingung gegeben, d. h. $b_N > 0$ bewirkt eine Anregung des Systems. Am rechten Terminal $x = l$ seien entweder eine „Kein-Ausfluß“-Randbedingung $-g_a \partial_x v = 0$, auch *sealed-end*-Randbedingung genannt, oder eine *killed-end* genannte Randbedingung (hier kann Ladung über die Membran entweichen, man stellt sich vor, daß das Neuron hier durchschnitten („killed“) sei) mit $v = 0$ gegeben. Für beide Fälle können analytische Lösungen angegeben werden:

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \frac{b_N}{c}\,\{cosh(x/\lambda)\,/\,tanh(l/\lambda) - sinh(x/\lambda)\} && \text{(sealed-end)},\\
v(x) &= \frac{b_N}{c}\,\{cosh(x/\lambda)\cdot tanh(l/\lambda) - sinh(x/\lambda)\} && \text{(killed-end)},
\end{aligned}
$$

wobei $c = \sqrt{g_m \cdot g_a}$ und $\lambda = \sqrt{g_a/g_m}$. Wir betrachten einen Zylinder der Länge $l = 1000\,\mu m$ mit konstantem Radius $r = 0.5\,\mu m$. Als spezifische Material-Parameter setzen wir $G_a = 1/1001/(\Omega\, cm)$

und $G_m = 1/401/(k\Omega cm^2)$. Dies sind die Parameter eines etwas älteren Benchmarks (*RallPack1*) der Computational Neuroscience.

1. Transformieren Sie die Leitfähigkeiten g_a und g_m so, daß nur die Einheiten Ω und μm auftreten (so sind sie einfacher im Code umzusetzen). Als Anregung setzen wir am linken Terminal die Randbedingung $b_N = 5e\text{-}8$. Welche Einheit hat diese Randbedingung?
2. Implementieren Sie ein numerisches Lösungsverfahren für den stationären Fall, indem Sie den Zylinder in N gleichmäßige Intervalle der Länge h unterteilen (d.h. es gibt mit den Randpunkten $N+1$ Stützpunkte x_0 bis x_N) und die zweite Ortsableitung an inneren Punkten durch zentrale Finite Differenzen wie in Aufgabenblatt 5 approximieren.

   Für die Gleichung an den Neumann-Rändern muss man aufpassen, da man eine Approximation von $g_a\,\partial_x v$ an den Randpunkten braucht. Es gibt zwei Möglichkeiten der Umsetzung, die exemplarisch am linken Randpunkt x_0 gezeigt werden:

   - *First order:* Die einfachste Variante ist durch Approximation mit den bekannten Werten v_0 und v_1 aus dem Gebiets-Inneren. Dies ergibt die Gleichung
   $$b_N = -g_a \partial_x v|_{x_0} \approx -g_a \frac{v_1 - v_0}{h} \Longleftrightarrow h \cdot \frac{b_N}{g_a} = v_0 - v_1$$
   an der Stelle x_0. Diese Gleichung liefert die Einträge der ersten Zeile der Diskretisierungs-Matrix.

   - *Second order:* Als alternative zweite Art kann man sich einen Ghost-Point x_{-1} im Abstand h links von x_0 hinzudenken, und einen zentralen Differenzen-Quotienten an der Stelle x_0 bilden:
   $$b_N = -g_a \partial_x v|_{x_0} \approx -g_a \frac{v_1 - v_{-1}}{2h} \Longleftrightarrow h \cdot \frac{2b_N}{g_a} + v_1 = v_{-1}. \tag{0.6}$$
   Nun hat man allerdings eine zusätzliche Unbekannte v_{-1}. Diese kann man durch Auswerten der ursprünglichen Differentialgleichung an der Stelle x_0 eliminieren (diesen numerischen Trick macht man, obwohl strenggenommen die PDE an der x_0 nicht definiert ist!):
   $$0 = \frac{v_1 - 2v_0 + v_{-1}}{h^2} - \frac{g_m}{g_a} v_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = v_1 + v_{-1} - 2v_0 - h^2 \cdot \frac{g_m}{g_a} v_0$$
   Hier kann man v_1 aus (0.6) einsetzen und erhält wieder die Gleichung bzw. erste Matrix-Zeile für den Punkt x_0.

   Erstellen Sie Plots der sich ergebenden Potentiale v für die Fälle sealed-end und killed-end mit jeweils first- und second-order Rand-Approximation über der Längsrichtung des Zylinders. Unterteilen Sie $[0, l]$ dazu in $k = 16$ gleichlange Intervalle.
3. Testen Sie Ihre Implementierung mit den Gitterweiten $h = l/k$, $k = 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$. Messen Sie an einem Punkt $x^* \in \Omega$ Ihrer Wahl den punktweisen Fehler $|e(x^*, h)| = |v^h(x^*) - v^{anal.}(x^*)|$ in Abhängigkeit von h. Erzeugen Sie Plots „Fehler über Schrittweite h“ für alle in (1) getesteten Fälle (sealed-end und killed-end mit jeweils first- und second-order Rand). An diesem Plot können Sie wie gehabt die Konsistenz-Ordnung der Verfahrens ablesen.
4. Erstellen Sie Plots wie in Teilaufgabe 1 für folgende Änderungen (jeweils einzeln vornehmen, Vergleich mit einer analytischen Lösung nicht nötig): Radius $r = 4.0$, $G_m = 1/20$, $G_a = 1/180$. Diskutieren Sie kurz, wie sich die veränderten Parameter auf die Potential-Verteilung auswirken.

Bemerkungen:

- Verwenden Sie in Octave geeignete Datenstrukturen (z.B. Sparse Matrices). Hinweise hierzu finden Sie z.B. im GNU Octave Handbuch, Kapitel 22.4.
- Der applizierte Strom ist hier so gewählt, dass das Potential physiologisch sinnvolle Werte annimmt. Die applizierte Strommenge müsste im realen Experiment den Gegebenheiten (Zelle, Radius, …) angepasst werden.