Übungen zur Vorlesung

"Objektorientiertes Programmieren im Wissenschaftlichen Rechnen"

Dr. O. Ippisch, Dr. C. Engwer

Abgabe am 20. 04. 2010 in der Vorlesung

In der Vorlesung wurden Klassen und Methoden wiederholt. `C++` erlaubtes auch Operatoren zu überladen.

ÜBUNG 1 RATIONAL ZAHLEN

Schreiben Sie eine Klasse für Rationale Zahlen. Die Zahl soll immer in der Form

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

als vollständig gekürzter Bruch dargestellt werden.

1. Was ist eine geeignete Datenstruktur für Rationale Zahlen?
2. Schreiben Sie zunächst eine Funktion `int gcd(int,int)` (Greatest common divisor), diese werden Sie später benötigen, um den Bruch zu kürzen.
   - Sie können den größten gemeinsamen Teiler mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bestimmen.
   - Algorithmus siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Größter_gemeinsamer_Teiler`, Abschnitt 2.2.
   - Implementieren Sie dieses Verfahren als rekursive Funktion.
3. Schreiben Sie eine Klasse `Rational`, die eine Rationale Zahl repräsentiert. Die Zahl soll im Konstruktor den Zähler und den Nenner übergeben bekommen. Zusätzlich hat die Klasse zwei Funktionen `numerator()` (Zähler) und `denominator()` (Nenner) die den Wert von Zähler und Nenner zurückliefern. Die Klasse soll drei Konstruktoren haben:
   - ein Default Konstruktor, der den Bruch mit 1 initialisiert,
   - ein Konstruktor, der den Bruch für gebenen Zähler und Nenner initialisiert und
   - ein Konstruktor der den Bruch mit einer ganzen Zahl initialisiert.
4. Schreiben Sie zu der Klasse Operatoren für `*=` `+=` `-=` `/=` und `==`.
5. Verwenden Sie die eben implementierten Methoden um freien Operatoren `*` `+` `-` `/` zu implementieren.
6. Überprüfen Sie Ihre Implementierung anhand verschiedener Test-cases. Initialisieren drei Brüche

   $$f_1 = -\frac{3}{12}, \quad f_2 = \frac{4}{3}, \quad f_3 = \frac{0}{1}.$$

   testen Sie die operatoren an folgenden Beispielen:

   $$f_3 = f_1 + f_2, \quad f_3 = f_1 \cdot f_2, \quad f_3 = 4 + f_2, \quad f_3 = f_2 + 5, \quad f_3 = 12 \cdot f_1, \quad f_3 = f_1 \cdot 6, \quad f_3 = \frac{f_1}{f_2}.$$

   geben sie nach jeder Operation das Ergebnis aus. Die Lösungen sind dann:

   $$\frac{13}{12}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{16}{3}, \quad \frac{19}{3}, \quad -\frac{3}{1}, \quad -\frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{16}.$$

ÜBUNG 2 FAREY BRÜCHE

Die Farey Brüche, oder Farey Folge, F_n vom Grad N ist eine geordnete Menge von gekürzten Brüchen

$$\frac{p_i}{q_i} \qquad \text{mit} \qquad p_i \le q_i \le N \qquad \text{und} \qquad 0 \le i < |F_N|$$

und

$$\frac{p_i}{q_i} < \frac{p_j}{q_j} \qquad \forall 0 \le i < j < |F_N|.$$

Verwenden Sie die `Rational` Klasse um eine Funktion

```
void Farey(int N)
```

zu schreiben, die die Farey Brüche bis Grad N berechnet und am Bildschirm ausgibt.

Algorithmus: Die Farey Folgen lassen sich rekursiv berechnen. Das erste Folgenglied ist gegeben als

$$F_1 = \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}\right)$$

Für eine bekanntes Folgenglied F_n ergibt sich F_{n+1}, indem man zwischen zwei Elementen $\frac{p_i}{q_i}$ und $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ ein weiteres Element $\frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}}$ einfügt, wenn die Nennersumme $q_i + q_{i+1} = n + 1$ ist.

Beispiel: Um aus dem Folgenglied F_6 das Glied F_7 zu bestimmen ergibt sich folgende Konstruktion:

$$F_6 = \Bigg(\underbrace{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{6}}_{\frac{1}{7}}, \tfrac{1}{5}, \underbrace{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}}_{\frac{2}{7}}, \underbrace{\tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}}_{\frac{3}{7} \text{ und } \frac{4}{7}}, \underbrace{\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}}_{\frac{5}{7}}, \tfrac{4}{5}, \underbrace{\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{1}}_{\frac{6}{7}} \Bigg)$$

Die neuen Elemente sind:

$$\tfrac{0+1}{1+6} = \tfrac{1}{7} \;;\; \tfrac{1+1}{4+3} = \tfrac{2}{7} \;;\; \tfrac{2+1}{5+2} = \tfrac{3}{7} \;;\; \tfrac{1+3}{2+5} = \tfrac{4}{7} \;;\; \tfrac{2+3}{3+4} = \tfrac{5}{7} \;;\; \tfrac{5+1}{6+1} = \tfrac{6}{7}$$

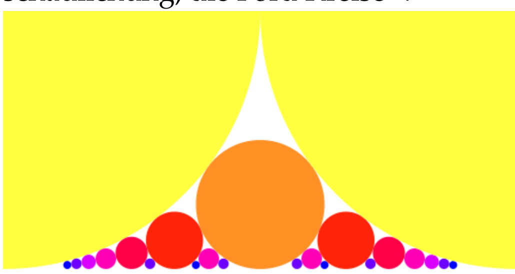
Richtig einsortiert ergibt sich nun

$$F_7 = \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}, \tfrac{1}{1} \right)$$

Zur Kontrolle:
Die Farey Folgen bis zum Grad 6

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_2 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_3 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_4 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_5 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_6 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{1}\right).
\end{aligned}$$

Es gibt zu diesen Brüchen eine schöne Veranschaulichung, die Ford Kreise [a]:



[a] siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Ford-Kreis`