

Übungen zur Vorlesung
“Objektorientiertes Programmieren im Wissenschaftlichen Rechnen”

Dr. Olaf Ippisch, Ole Klein
ole.klein@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe am 22. 04. 2014 in der Vorlesung

In der Vorlesung wurden Klassen und Methoden wiederholt. C++ erlaubt es auch Operatoren zu überladen.

ÜBUNG 1 RATIONALE ZAHLEN

Schreiben Sie eine Klasse für Rationale Zahlen. Die Zahl soll immer in der Form

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

als vollständig gekürzter Bruch dargestellt werden.

1. Was ist eine geeignete Datenstruktur für Rationale Zahlen?
2. Schreiben Sie zunächst eine Funktion `int gcd(int, int)` (Greatest common divisor), diese werden Sie später benötigen, um den Bruch zu kürzen.
 - Sie können den größten gemeinsamen Teiler mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bestimmen.
 - Algorithmus siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Größter_gemeinsamer_Teiler, Abschnitt 2.2.
 - Implementieren Sie dieses Verfahren als rekursive Funktion.
3. Schreiben Sie eine Klasse `Rational`, die eine Rationale Zahl repräsentiert. Die Zahl soll im Konstruktor den Zähler und den Nenner übergeben bekommen. Zusätzlich hat die Klasse zwei Funktionen `numerator()` (Zähler) und `denominator()` (Nenner) die den Wert von Zähler und Nenner zurückliefern. Die Klasse soll drei Konstruktoren haben:
 - ein Default Konstruktor, der den Bruch mit 1 initialisiert,
 - ein Konstruktor, der den Bruch für gegebenen Zähler und Nenner initialisiert und
 - ein Konstruktor der den Bruch mit einer ganzen Zahl initialisiert.
4. Schreiben Sie zu der Klasse Operatoren für `*= += -= /=` und `==`.
5. Verwenden Sie die eben implementierten Methoden um freie Operatoren `* + - /` zu implementieren.
6. Überprüfen Sie Ihre Implementierung anhand verschiedener Test-Cases. Initialisieren Sie drei Brüche

$$f_1 = -\frac{3}{12}, \quad f_2 = \frac{4}{3}, \quad f_3 = \frac{0}{1}.$$

Testen Sie die Operatoren an folgenden Beispielen:

$$f_3 = f_1 + f_2, \quad f_3 = f_1 \cdot f_2, \quad f_3 = 4 + f_2, \quad f_3 = f_2 + 5, \quad f_3 = 12 \cdot f_1, \quad f_3 = f_1 \cdot 6, \quad f_3 = \frac{f_1}{f_2}.$$

Geben sie nach jeder Operation das Ergebnis aus. Die Lösungen sind dann:

$$\frac{13}{12}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{16}{3}, \quad \frac{19}{3}, \quad -\frac{3}{1}, \quad -\frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{16}.$$

10 Punkte

ÜBUNG 2 FAREY-BRÜCHE

Eine Farey-Folge F_N vom Grad N (Farey-Brüche vom Grad N) ist eine geordnete Menge von gekürzten Brüchen

$$\frac{p_i}{q_i} \quad \text{mit} \quad p_i \leq q_i \leq N \quad \text{und} \quad 0 \leq i < |F_N|$$

und

$$\frac{p_i}{q_i} < \frac{p_j}{q_j} \quad \forall 0 \leq i < j < |F_N|.$$

Verwenden Sie die Rational Klasse um eine Funktion

```
void Farey(int N)
```

zu schreiben, die die Farey-Brüche bis zum Grad N berechnet und am Bildschirm ausgibt.

Algorithmus: Die Folgen lassen sich rekursiv berechnen. Die erste Folge ist gegeben als

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right)$$

Für eine bekannte Folge F_N ergibt sich F_{N+1} , indem man zwischen zwei Elementen $\frac{p_i}{q_i}$ und $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ ein weiteres Element $\frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}}$ einfügt, wenn die Nennersumme $q_i + q_{i+1} = N + 1$ ist.

Beispiel: Um F_7 aus F_6 zu bestimmen ergibt sich folgende Konstruktion:

$$F_6 = \left(\underbrace{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}}_{\frac{1}{7}}, \underbrace{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}}_{\frac{2}{7}}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}}_{\frac{3}{7} \text{ und } \frac{4}{7}}, \underbrace{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}}_{\frac{5}{7}}, \underbrace{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}}_{\frac{6}{7}}, \frac{1}{1} \right)$$

Die neuen Elemente sind:

$$\frac{0+1}{1+6} = \frac{1}{7}; \quad \frac{1+1}{4+3} = \frac{2}{7}; \quad \frac{2+1}{5+2} = \frac{3}{7}; \quad \frac{1+3}{2+5} = \frac{4}{7}; \quad \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}; \quad \frac{5+1}{6+1} = \frac{6}{7}$$

Richtig einsortiert ergibt sich nun

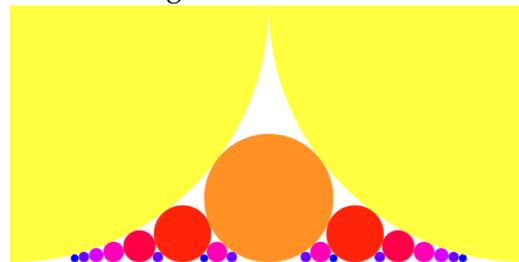
$$F_7 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1} \right)$$

Zur Kontrolle:

Die Farey-Folgen bis zum Grad 6

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right) \\ F_2 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right) \\ F_3 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right) \\ F_4 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right) \\ F_5 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right) \\ F_6 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right). \end{aligned}$$

Es gibt zu diesen Brüchen eine schöne Veranschaulichung, die Ford-Kreise ^a:



^asiehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Ford-Kreis>

10 Punkte