Aufgabe 1 Testfunktionen

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}\right) & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf $\Omega = (-1, 1)$ im Raum $C_0^\infty(\Omega)$ enthalten ist.

b) Seien f und g stetige Funktionen auf dem Intervall $\Omega = (a, b)$. Beweisen Sie, dass aus

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

die Übereinstimmung der Funktionen folgt, also $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Bemerkung. Diese Aussage gilt auch, wenn wir nur voraussetzen, dass f und g im Raum $L_2(\Omega)$ enthalten sind, und wird dann manchmal *Fundamentallemma der Variationsrechnung* genannt. Die Gleichheit folgt in diesem Fall nur im L_2-Sinne, da sich ja an den Integralen nichts ändert, wenn wir eine Funktion nur auf einer Nullmenge abändern. Wir können daraus folgern, dass schwache Ableitungen eindeutig bestimmt sind, sofern sie existieren.

Anleitung. Führen Sie zunächst einen Widerspruchsbeweis für den Spezialfall $g = 0$. Nehmen Sie also an, dass $f(x_0) \neq 0$ für mindestens ein $x_0 \in \Omega$. Ohne Einschränkung sei $f(x_0) > 0$. Folgern Sie aus dem ε-δ-Kriterium der Stetigkeit, dass f auf einer ganzen Umgebung von x_0 positiv ist. Nun können Sie eine passend skalierte Variante der Funktion ψ aus Teil a) als Testfunktion verwenden, um einen Widerspruch zu erhalten. Damit ist die Aussage für $g = 0$ bewiesen. Der allgemeine Fall lässt sich auf diesen Spezialfall zurückführen.

8 Punkte

Aufgabe 2 Quadratische konforme finite Elemente in einer Raumdimension

Für eine Unterteilung des Intervalls $\Omega = (a, b)$ in Teilintervalle (x_{i-1}, x_i), $0 < i \leq N$ wurden in der Vorlesung die Räume

$$V_h^k = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_{[x_{i-1},x_i]} \text{ ist Polynom vom Grad } k \text{ für alle } i\}$$

eingeführt. (Gegebenenfalls muss dieser Raum in Anwendungen noch eingeschränkt werden, um Dirichlet-Randbedingungen Rechnung tragen zu können.) Außerdem haben wir für den Fall $k = 1$ die *Knotenbasis* kennen gelernt.

a) Im Fall $k = 2$ führen wir als zusätzliche „Knoten“ die Intervallmittelpunkte $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ für $0 < i \leq N$ ein. Es gibt nun wieder eine „Knotenbasis“ φ_i, $i = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, N - \frac{1}{2}, N$, die durch die Bedingung

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } i, j$$

charakterisiert ist. Geben Sie diese Basis explizit an!

b) Sei nun $\Omega = (0,1)$. Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 2x && \text{für } x \in \Omega, \\ u(0) &= 1, \\ -u'(1) &= 1. \end{aligned}$$

Auch wenn die exakte analytische Lösung dieser Aufgabe ersichtlich ist, wollen wir zu Demonstrationszwecken eine Näherungslösung für dieses Problem ermitteln. Dazu unterteilen wir Ω in zwei gleiche Teilintervalle $(x_0, x_1) = (0, \frac{1}{2})$ und $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, 1)$.

- Führen Sie das Problem auf ein Problem mit einer homogenen Dirichlet-Randbedingung zurück. (Die Neumann-Randbedingung am rechten Intervallende bleibt davon natürlich unberührt.)
- Geben Sie den für dieses Problem passenden Raum V_h^2 sowie die Knotenbasis dieses Raumes an. ($\dim V_h^2 = 4$)
- Stellen Sie die Finite-Elemente-Formulierung und das zugehörige Gleichungssystem auf.
- Geben Sie die resultierende Näherungslösung an.

12 Punkte