Aufgabe 22 Interpolationsgewichte am Beispiel

Sei der Operator A auf einem uniformen nxn Gitter durch folgenden Stern gegeben:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{29}{4} & -1 \\ -\frac{1}{8} & -2 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Sei der Knoten i ein F-Knoten und seine Nachbarknoten wie in Abbildung 1.

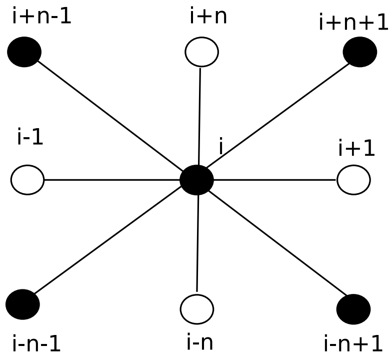

Abbildung 1: Verbindungen des F-Knotens i. Knoten aus C sind ungefüllt. F-Knoten sind Schwarz gefüllt. Verbindungen des Knotens i im Matrixgraph sind als Linien eingezeichnet

a) Von welchen Nachbarknoten ist Knoten i stark abhängig, wenn man als Schwelle $\theta = 0.2$ in Gleichung (10.7) im Skript wählt. Bestimmen Sie die Mengen C_i, D_i^s und D_i^w.

b) Stellen Sie für dieses Beispiel die Gleichung (10.11) aus dem Skript auf und führen Sie alle Schritte zum Berechnen der Gewichte w_{ij} wie in der Vorlesung aus.

5 Punkte

Aufgabe 23 AMG Grobgitterwahl

Wir betrachten das Standard 2D Laplaceproblem mit Finite Differenzen auf einem uniformen Vierecksgitter. Die resultierende Matrix bestitzt den Stern

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

Skizzieren sie an einem $5x5$ Beispiel den Matrixgraph und führen Sie den 1. Schritt von Algorithmus 10.9 (vorläufige Zerlegung $V = F \cup C$ gemäß Kriterium 10.8) an diesem Graphen durch. Markieren sie alle resultierenden F Knoten im Graphen.

5 Punkte

Aufgabe 24 Glättungseigenschaft des gedämpften Jacobi

Sie die Matrix A symmetrisch positive definit und $D := \operatorname{diag}(A)$. Wir betrachten das mit $\omega > 0$ gedämpfte Jacobi-Verfahren mit dem Glättungsoperator

$$W = I - \frac{1}{\omega} D^{-1} A\,.$$

Wir wollen näher untersuchen unter welchen Voraussetzung das Verfahren die Glättungseigenschaft (10.1) erfüllt. (Beachten Sie, dass $\langle u, v\rangle_2 := \langle D^{-1}Au, Av\rangle$ ist. Dies wurde in der Vorlesung falsch eingeführt!)

Zeigen Sie folgendes:

a) Für das gedämpfte Jacobiverfahren gilt:

$$\|We\|_1^2 = \|e\|_1^2 - \omega\langle(\frac{2}{\omega}D - A)\omega D^{-1}Ae, D^{-1}A\rangle$$

b) Zeigen Sie. dass somit die Glättungseigenschaft (10.1)

$$\|We\|_1^2 \leq \|e\|_1^2 - \alpha\|e\|_2^2$$

äquivalent zur Forderung

$$\rho(D^{-1}A) \leq \frac{2}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega^2}$$

ist.

Hinweis: Benützen Sie eine geeignete Substitution und die Tatsache, dass für zwei symmetrisch positive Matrizen B_1, B_2 und $c > 0$ folgendes gilt:

$$\langle B_1e, e\rangle \leq c(B_2e, e) \Longleftrightarrow \rho\langle B_2^{-1}B_1\rangle \leq C\,.)$$

10 Punkte