Paralle Lösung großer Gleichungssysteme, Sommersemester 2009 — Aufgabenblatt 7
Prof. Dr. Peter Bastian, Markus Blatt, Sven Marnach — Abgabe 4. Juni 2009
IWR, Universität Heidelberg

Aufgabe 14 Summe orthogonaler Projektionen

Seien $P_0, \dots, P_N$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$ orthogonale Projektionen.

Zeigen Sie unter welchen Bedingungen die Summe der Projektionen wieder eine orthogonale Projektion darstellt, d.h $P^2 = P$ und $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ gelten. *5 Punkte*

Aufgabe 15 Positive Definitheit der P_i

Die Schwarzverfahren werden mittels projektions(ähnlichen) Operatoren $P_i = R_i^T A_i^{-1} R_i A$ beschrieben. Hier sei A symmetrisch und positive definite.

Zeigen Sie, dass die P_i symmetrisch und positive definite sind bezüglich des A-Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$! *5 Punkte*

Aufgabe 16 Das eingeschränkte additive Schwarz Verfahren

Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie mit dem parallelen additiven Schwarz Verfahren experimentiert. Wie Sie sich sicher erinnern, lautet der vorkonditionierte Operator des Verfahren

$$\sum_{i=1}^{p} R_i^T A_i^{-1} R_i A\,.$$

Hier ist R_i die Restriktion auf das Telgebiet, A_i^{-1} der exakte Teilgebietslöser und R_i^T der Fortsetzungsoperator, der den Vektor auf dem Teilgebiet mit Nullen im gesamten Gebiet fortsetzt.

Durch die Überlappung der Teilgebiete muss man beim bilden der Summer im paralleln Fall natürlich kommunizieren. Darüber hinaus werden auf den Freiheitsgraden, die auf einem Prozessor dem Überlap angehören, mehrere Korrekturen addiert.

Cai und Sarkis erkannten diese Probleme und entwarfen einen additiven Vorkonditionierer, der beide Probleme entschärft. Dazu führten Sie einen modifizierten Fortsetzungsoperator $\widetilde{R}_i^T$ ein. Hierzu ordneten Sie (zusätzlich zu der überlappenden Zerlegung) alle Freiheitsgrade eines Vectors genau einem der Prozesse zu, zu deren Teilgebiet der überlappenden Zerlegung er auch gehört. Das gibt eine Zerlegung $I = \cup_{i=1}^{p} I_i^0$ wie in Kapitel 4.4. Der neue Fortsetzungsoperator setzt nun alle Freiheitsgrade, die nicht zu I_i^0 gehören mit 0 fort und vermeidet so Kommunikation und mehrfache Korrekturen. Der vorkonditionierte Operator des eingeschränkten additiven Schwarz Verfahrens lautet nun

$$\sum_{i=1}^{N} \widetilde{R}_i^T A_i^{-1} R_i A\,.$$

Diesen sollen Sie nun mit exaktem und inexaktem Teilgebietslöser implementieren. Die einfachste Implementierung ist sicherlich folgende:

a) Im Header overlappingpreconditioner.hh implementieren sie einen neuen Datahandle. Nehmen Sie den `AddExchangeDatahandle` als Vorlage. An dieser Stelle müssen Sie die eindeutige Zerlegung berechnen und zwar ähnlich wie in der Aufgabe 10 auf Blatt. Mit der entstehenden Maske können Sie dann sicher stellen das nur Werte, für die der Prozessor zuständig ist, in der `gather` Methode des DataHandles in den Puffer geschrieben werden und ansonsten einfach 0 geschrieben wird.

b) Nehmen Sie die Klassen `InexactSubdomainSolver` und `SuperLUSubdomainSolver` als Vorlage und entwerfen Sie neue Klassen, die in der `apply` Methode das neue DataHandle verwenden.

c) Da das vorkonditionierte System nun nicht mehr symmetrisch ist müssen sie statt `CGSolver` den `BiCGSTABSolver` als Löser im Hauptprogramm verwenden.

Führen Sie die Messungen aus Aufgabe 13 des 6. Blattes mit den eingeschränkten und uneingeschränkten Schwarz Verfahren noch einmal aus und vergleichen Sie die Ergebnisse.

10 Punkte