ÜBUNG 12 A-ADJUNGIERTE MATRIX

Es seien A und E $n \times n$-Matrizen, wobei A symmetrisch positiv definit sei. Dann ist durch A ein Skalarprodukt definiert, das der Matrix E eine Adjungierte E^* zuordnet:

$$\forall x, y : \langle Ex, y \rangle = \langle x, E^* y \rangle$$

Bestimmen Sie diese Matrix E^* als Funktion von E.

4 Punkte

ÜBUNG 13 JACOBI-VERFAHREN ALS ADDITIVES SCHWARZ-VERFAHREN

In der Vorlesung haben Sie die gedämpfte additive Schwarz-Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \sum_{i=0}^{p} R_i^T A_i^{-1} R_i (b - Ax^{(k)}) \tag{1}$$

mit

$$A_i = R_i A R_i^T \tag{2}$$

kennengelernt.

1. Geben Sie an, wie der Dämpfungsfaktor ω, die Teilgebietsanzahl p und die Restriktionsmatrizen R_i zu wählen sind, damit (1) das Jacobi-Verfahren beschreibt.

2. Sei nun A die Steifigkeitsmatrix einer Finite-Elemente-Diskretisierung mit dem Finite-Elemente-Raum V^h und der Basis φ_i^h. Das Finite-Elemente-Gitter habe die Dimension d und die Gitterweite h. Für jedes $u^h \in V^h$ haben wir eine eindeutige Darstellung

$$u^h = \sum_{i=1}^{N} x_i \varphi_i^h, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|x\|_2 \leqslant C h^{-\frac{d}{2}} \left\| u^h \right\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^N$ bezeichnet und C eine von h unabhängige Konstante ist.

Um die abstrakte Schwarz-Theorie auf das Jacobi-Verfahren anwenden zu können, müssen die folgenden beiden Voraussetzungen erfüllt sein:

Voraussetzung A1 (Stabile Zerlegung)**.** Es gibt eine solche Konstante C_0, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine Zerlegung $x = \sum_{i=0}^{p} R_i^T x_i$ existiert, für die gilt

$$\sum_{i=0}^{p} \langle R_i^T x_i, R_i^T x_i \rangle_A \leqslant C_0 \langle x, x \rangle_A.$$

Voraussetzung A2 (Verschärfte Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** Es gibt Konstanten $0 \leqslant \varepsilon_{ij} \leqslant 1$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$, so dass für alle x_i und x_j gilt

$$\left| \langle R_i^T x_i, R_j^T x_j \rangle_A \right| \leqslant \varepsilon_{ij} \langle R_i^T x_i, R_i^T x_i \rangle_A^{\frac{1}{2}} \langle R_j^T x_j, R_j^T x_j \rangle_A^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie, dass diese Voraussetzungen für das Jacobi-Verfahren erfüllt sind und geben Sie die bestmögliche Wahl der Konstanten C_0 und ε_{ij} an.

16 Punkte