## ÜBUNG 14 SCHWARZ-VERFAHREN MIT INEXAKTEN LOKALEN LÖSERN

Sei $a(\cdot,\cdot)$ eine Bilinearform und $A$ die zugehörige Steifigkeitsmatrix. Beim Schwarz-Verfahren mit exaktem Lösen auf den Teilgebieten wird lokal eine Bilinearform $a_i(\cdot,\cdot)$ mit

$$a_i(u_i, v_i) := a(R_i^T u_i, R_i^T v_i)$$

und zugehöriger Steifigkeitsmatrix

$$A_i = R_i A R_i^T$$

betrachtet. Nehmen Sie an, dass ein inexakter Löser statt $a_i(\cdot,\cdot)$ ein gestörtes $\tilde{a}_i(\cdot,\cdot)$ mit Matrix $\tilde{A}_i$ löst. Dabei sei $\tilde{a}_i$ weiterhin symmetrisch und positiv definit.

Wie sehen in diesem Fall die Operatoren $P_i$ des Schwarz-Verfahrens aus? Welche Eigenschaften der $P_i$ bleiben erhalten, welche können durch das inexakte Lösen verloren gehen? Auf welche Stellen des Konvergenzbeweises für das Schwarz-Verfahren hat das Einfluss?

*8 Punkte*

## ÜBUNG 15 VISUALISIERUNG DER SCHWARZ-VERFAHREN

Benutzen Sie das Vorgehen der praktischen Übung von Blatt 2, um den Verlauf des Fehlers der auf Blatt 4 verwendeten Verfahren zu visualisieren. Verwenden Sie dazu eine homogene rechte Seite und homogene Randbedingungen sowie einen konstanten Startvektor, um die Interpretation der Ergebnisse zu erleichtern.

Wählen Sie ein Gitter, das hinreichend fein ist, um folgende Fragen beantworten zu können:

- Wie ist der Fehler räumlich verteilt?
- Gibt es signifikante Unterschiede zwischen den vier Verfahren?
- Wo würden Sie ansetzen, um die Verfahren zu verbessern?

Dabei werde das Problem zunächst auf den einzelnen Teilgebieten exakt gelöst. Erzeugen Sie anschließend von den multiplikativen Verfahren jeweils eine Variante, die auf den Teilgebieten mit einem iterativen Löser Ihrer Wahl nur näherungsweise löst. Hat diese Änderung einen signifikanten Einfluss auf die Verteilung des Fehlers? Experimentieren Sie dazu mit der Genauigkeit, bis zu der das lokale Problem gelöst wird.

*12 Punkte*