Übung 19 Endliche Überdeckung

Es existiert eine Färbung von $\{\hat{\Omega}_i\}_{i=1}^p$ mit höchstens N^c Farben (Assumption 5.10). Formal: Es gibt eine Abb. $c : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, N^c\}$ sodass

$$c(i) = c(j) \Rightarrow \hat{\Omega}_i \cap \hat{\Omega}_j = \varnothing$$

Sei $J_k = \{i \in \{1, \ldots, p\}; c(i) = k\}$ und wir vorraussetzen, dass $|J_k| = \frac{p}{N^c}$.

1. Zeigen Sie, dass für $i \neq j,\ i, j \in J_k$

$$< R_i^T x_i, R_j^T x_j >_A = 0$$

2. Es gilt die verstärkte Cauchy-Schwarz Ungleichung mit

$$\mathcal{E}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \ \vee \ c(i) \neq c(j) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

3. In diesem allgemeinen Fall kann man zeigen

$$\rho(\mathcal{E}) = 1 + \frac{N^c - 1}{N^c} p = O(p)$$

4. Jetzt betrachten wir eine spezielle Situation, siehe Abb. 1. Seit p gerade und $\{\hat{\Omega}_i\}_{i=0}^p$ eine Zerlegung von Ω in überlappende Teilgebiete mit folgenden Eingenschaften:

   - 1 blaues Teilgebiet, Überlapp mit allen anderen Teilgebieten
   - $p/2$ grüne Teilgebiete, Überlapp mit 2 roten und blauem Teilgebiet
   - $p/2$ rote Teilgebiete, Überlapp mit 2 grünen und blauem Teilgebiet

   Wie kann man in diesem Fall den spektralen Radius $\rho(\mathcal{E})$ von unten abschätzen?

8 Punkte

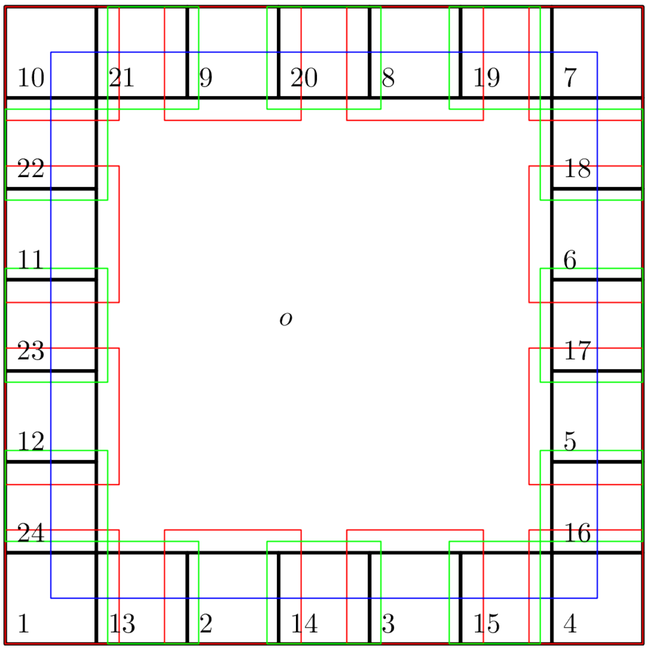

Abbildung 1: Gebiet Zerlegung

ÜBUNG 20 TRANSFORMATION LAGRANGE BASIS ZU HIERARCHISCHER BASIS

Es sei ein 1D Grobgitter gegeben mit N Elementen der Weite H gegeben. Die feineren Gitter der Weite $\frac{H}{2^l}$ werden durch uniforme Verfeinerung gebildet. Auf jedem dieser Gitter kann man sowohl die Standard Knotenbasis als auch die entsprechen Hierarchische Basis verwenden. Siehe auch Abbildung 2 für eine Darstellung der Basen basierend auf einem Grobgitter bestehend aus 2 Elementen.

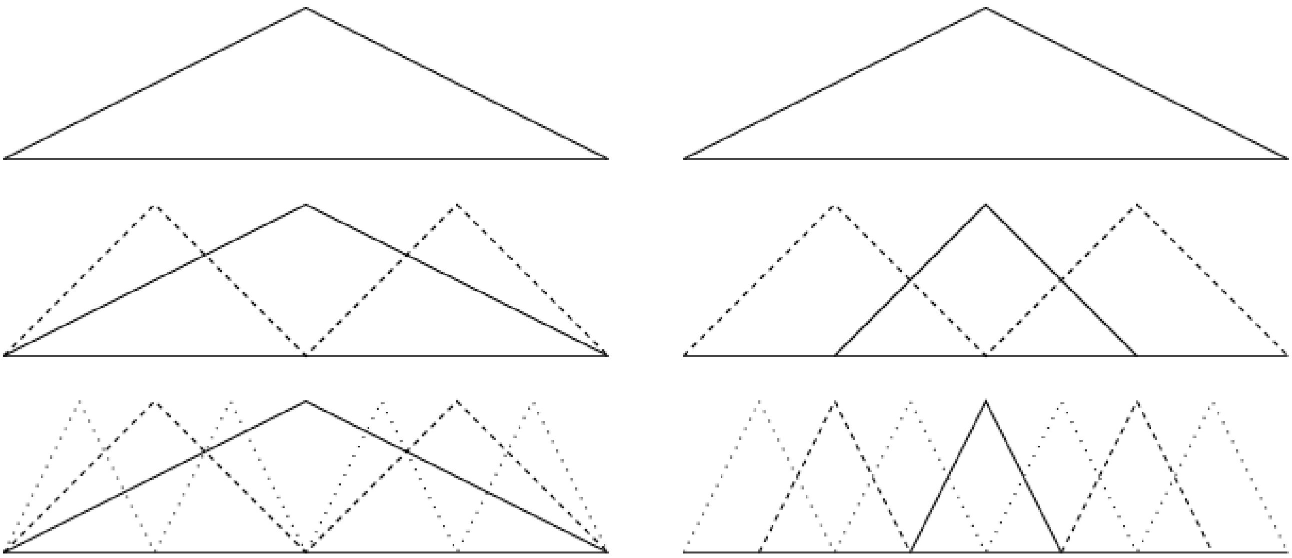

Abbildung 2: Hierarchische (links) gegenüber Standard nodaler Basis (rechts) in 1D

Berechnen Sie die Transformation zwischen den beiden Basen für ein Gitterlevel l. *10 Punkte*

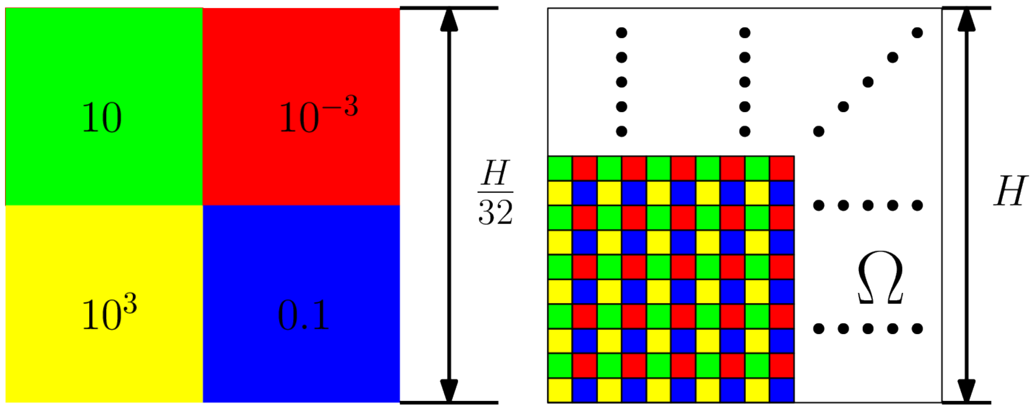

Abbildung 3: Permeabilitätsfeld auf dem Gebiet Ω (Quadrat mit der Kantenlänge H.)

ÜBUNG 21 PARALLELES ZWEIGITTERVERFAHREN ANGEWANDT AUF EIN DIFFUSIONSPROBLEM MIT HETEROGENEN PERMEABILITÄTSFELD

Das DUNE module `dune-pdelab` stellt unter anderem ein Diffusionsproblem zur Verfügung. Den lokalen Operator namens `ConvectionDiffusionFEM` findet man in `dune-pdelab/dune/localoperators/convectiondiffusionfem.hh`. Er beschreibt das folgende Problem

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \{A(x)\nabla u + b(x)u\} + c(x)u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ on } \partial\Omega_D \; (Dirichlet) \\ (b(x,u) - A(x)\nabla u) \cdot \nu &= j \text{ on } \partial\Omega_N \; (Neumann) \\ -\left(A(x)\nabla u\right) \cdot \nu &= o \text{ on } \partial\Omega_O \; (Outflow) \end{aligned}$$

Die für das Beispiel-Diffusionsproblem ($A = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $f = 0$, $j = 0$, $g = 0$, $o = 0$) notwendige Klasse `GenericEllipticProblem` finden Sie im Header `problem1.hh` Dieses Problem wurde auch in den letzten Aufgaben benutzt.

In dieser Aufgabe sollen Sie das Programm nun so abändern, dass die Permeabilität A heterogen ist. Als Permeabilitätsfeld benutzen wir den Schachbrettmuster, siehe Abb. 3.

Aufgabe 1 Implementieren Sie den Permeabilitätsfeld wie in der Abb. 3.

Aufgabe 2 Was erwarten Sie mit dern Anzahl an Iterationschritten für verschiedene Methoden die wir bisher benutzt haben? Welche Methoden sollten theoretisch besser und schlechter sein und warum?

Aufgabe 3 Führen Sie mit dem Programm Testrechnungen durch, und zwar auf einem Gitter der Größe 512×512. Messen Sie dabei Die benötigte Anzahl an Iterationsschritten für $1, 4, 16, 64$ Prozessoren. Nehmen Sie verschiedene Overlaps. Vergleichen Sie folgende Varianten:

- das additive Schwarz Verfahren, ohne Grobgitterkorrektur
- das eingeschränkte additive Schwarz Verfahren
- das additive Schwarz Verfahren, Zweigitterverfahren mit Grobgitterkorrektur

Stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch (z.b. mit gnuplot) oder in einer Tabelle dar.

12 Punkte