Lösung tridiagonaler und dünnbesetzter linearer Gleichungssysteme

Stefan Lang

Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen
Universität Heidelberg
INF 368, Raum 532
D-69120 Heidelberg
phone: 06221/54-8264
email: Stefan.Lang@iwr.uni-heidelberg.de

WS 12/13

Themen

Lösung tridiagonaler und dünnbesetzter linearer Gleichungssysteme

- Optimaler sequentieller Algorithmus
- Zyklische Reduktion
- Gebietszerlegung
- *LU*-Zerlegung dünnbesetzter Matrizen
- Parallelisierung

Optimaler sequentieller Algorithmus

- Als Extremfall eines dünnbesetzten Gleichungssystemes betrachten wir

$$Ax = b \qquad (1)$$

mit $A \in \mathcal{R}^{N \times N}$ tridiagonal.

$$\begin{pmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & & & \\ & * & * & * & & \\ & & * & * & * & \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \end{pmatrix}$$

- Der optimale Algorithmus ist die Gauß-Elimination, manchmal auch Thomas-Algorithmus genannt.

Optimaler sequentieller Algorithmus

- Gauß-Elimination für tridiagonale Systeme

  // Vorwärtselimination (diesmal lösen, nicht LU-Zerlegen):
  for $(k = 0; k < N - 1; k++)$ {
  $l = a_{k+1,k}/a_{k,k}$;
  $a_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - l \cdot a_{k,k+1}$
  $b_{k+1} = b_{k+1} - l \cdot b_k$;
  } // $(N-1) \cdot 5$ Rechenoperationen
  // Rückwärtseinsetzen:
  $x_{N-1} = b_{N-1}/a_{N-1,N-1}$;
  for $(k = N - 2; k \geq 0; k--)$ {
  $x_k = (b_k - a_{k,k+1} \cdot x_k + 1)/a_{k,k}$;
  } // $(N-1)3 + 1$ Rechenoperationen

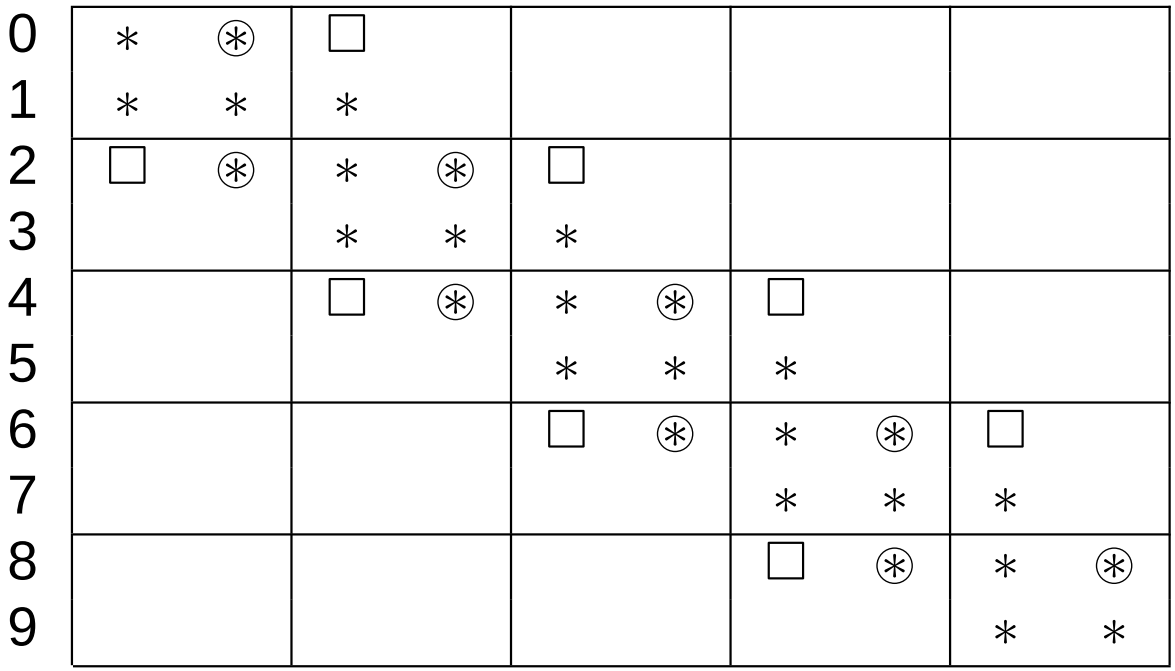
- Die sequentielle Komplexität beträgt

$$T_S = 8Nt_f$$

  Offensichtlich ist der Algorithmus streng sequentiell!

Zyklische Reduktion

- Betrachte eine Tridiagonalmatrix mit $N = 2M$ (N gerade).
- *Idee:* Eliminiere in jeder *geraden* Zeile k die Elemente $a_{k-1,k}$ und $a_{k+1,k}$ mit Hilfe der ungeraden Zeilen darüber bzw. darunter.
- Jede gerade Zeile ist damit nur noch mit der vorletzten und übernächsten gekoppelt; da diese gerade sind, wurde die Dimension auf $M = N/2$ reduziert.
- Das verbleibende System ist wieder tridiagonal, und die Idee kann rekursiv angewandt werden.



⊛ werden entfernt, dabei entsteht fill-in (□).

Zyklische Reduktion

- Algorithmus der Zyklischen Reduktion

  // Elimination aller ungeraden Unbekannten in geraden Zeilen:
  for $(k = 1; k < N; k \mathrel{+}= 2)$
  {
  // Zeile k modifiziert Zeile $k-1$
  $l = a_{k-1,k} / a_{k,k}$;
  $a_{k-1,k-1} = a_{k-1,k-1} - l \cdot a_{k,k-1}$;
  $a_{k-1,k+1} = -l \cdot a_{k,k+1}$; // fill-in
  $b_{k-1} = b_{k-1} - l \cdot b_k$;
  } // $\frac{N}{2} 6 t_f$
  for $(k = 2; k < N; k \mathrel{+}= 2)$;
  {
  // Zeile $k-1$ modifiziert Zeile k
  $l = a_{k,k-1} / a_{k-1,k-1}$;
  $a_{k,k-2} = l \cdot a_{k-1,k-2}$; // fill-in
  $a_{k,k} = l \cdot a_{k-1,k}$;
  } // $\frac{N}{2} 3 t_f$

- Alle Durchläufe beider Schleifen können parallel bearbeitet werden (nehmen wir eine Maschine mit gemeinsamem Speicher an)!

Zyklische Reduktion

- Resultat dieser Elimination ist

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	*		*							
1	*	*	*							
2	*		*		*					
3			*	*	*					
4			*		*		*			
5					*	*	*			
6					*		*		*	
7							*	*	*	
8							*		*	
9									*	*

bzw. nach Umordnen

	1	3	5	7	9	0	2	4	6
1	*					*	*		
3		*					*	*	
5			*					*	*
7				*					*
9					*				
0						*	*		
2						*	*	*	
4							*	*	*
6								*	*
8									*

- Sind die x_{2k}, $k = 0, \ldots, M-1$, berechnet, so können die ungeraden Unbekannten mit

  for $(k = 1; k < N-1; k \mathrel{+}= 2)$

  $\quad x_k = (b_k - a_{k,k-1} \cdot x_{k-1} - a_{k,k+1} \cdot x_{k+1})/a_{k,k}$;

  // $\frac{N}{2} 5 t_f$

  $x_{N-1} = (b_{N-1} - a_{N-1,N-2} \cdot x_{N-2})/a_{N-1,N-1}$;

  parallel berechnet werden.

Zyklische Reduktion

- Der *sequentielle* Aufwand für die zyklische Reduktion ist somit

$$\begin{aligned} T_S(N) &= (6+3+5)t_f \left(\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{8} + \cdots + 1 \right) \\ &= 14Nt_f \end{aligned}$$

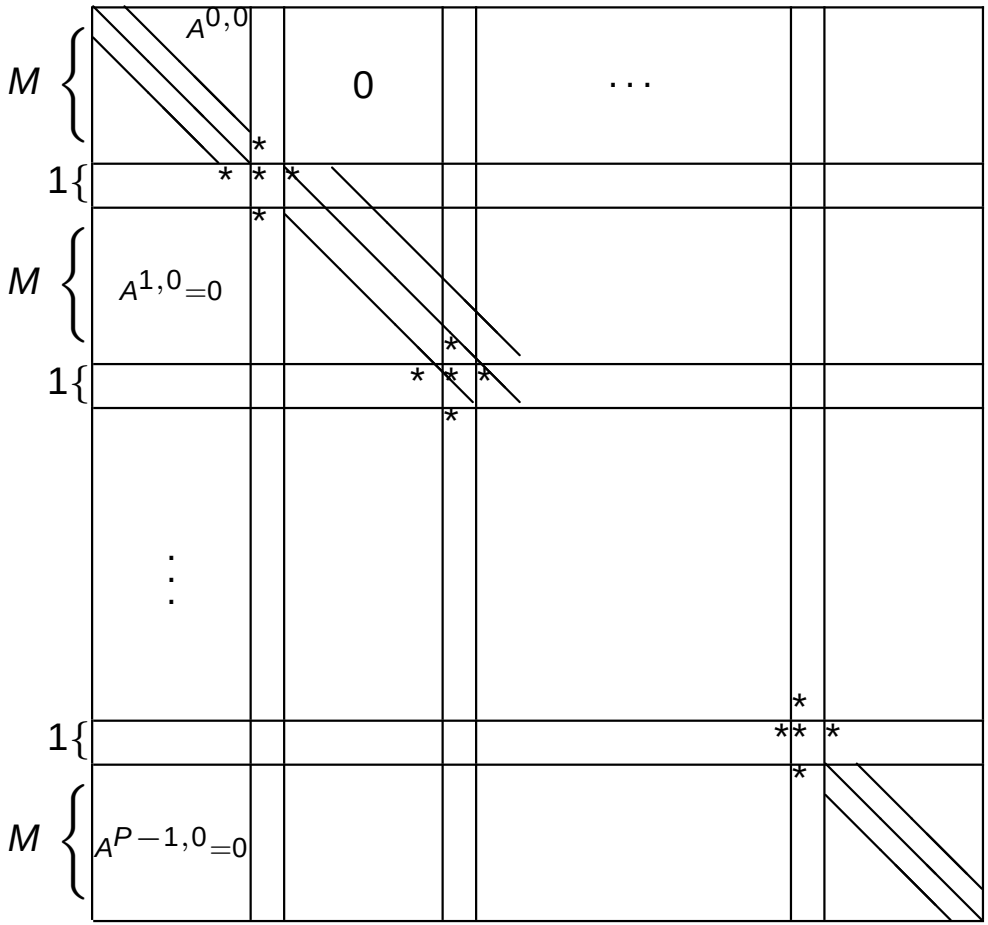
- Dies ist fast doppelt so viel wie der optimale sequentielle Algorithmus benötigt. Dafür kann die zyklische Reduktion parallelisiert werden. Die maximal erreichbare Effizienz ist jedoch

$$E_{\text{max}} = \frac{8}{14} \approx 0.53,$$

wobei angenommen wurde, dass alle Operationen optimal parallel ausgeführt werden und Kommunikation umsonst ist (Rückwärtseinsetzten beschäftigt nur $\frac{N}{2}$ Prozessoren!). Nicht berücksichtigt wurde auch, dass die zyklische Reduktion mehr Indexrechnung benötigt!

Gebietszerlegungsmethoden

- Ein anderer Ansatz lässt sich im Prinzip auf allgemeinere Problemstellungen erweitern lässt: Gebietszerlegungsverfahren
- Es sei P die Zahl der Prozessoren und $N = MP + P - 1$ für ein $M \in \mathbf{N}$. Wir unterteilen dann die $N \times N$-Matrix A in P Blöcke à M Zeilen mit je einer Zeile zwischen den Blöcken:



Gebietszerlegung

- Die Unbekannten zwischen den Blöcken bilden das *Interface.* Jeder Block ist mit höchstens zwei Interface-Unbekannten gekoppelt.
- Nun sortieren wir Zeilen und Spalten der Matrix so um, dass die Interfaceunbekannten am Ende stehen. Dies ergibt folgende Gestalt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A^{0,0} & & & & A^{0,I} \\ & A^{1,1} & & & A^{1,I} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & A^{P-1,P-1} & A^{P-1,I} \\ \hline A^{I,0} & A^{I,1} & \dots & A^{I,P-1} & A^{I,I} \end{array}\right),$$

wobei $A^{p,p}$ die $M \times M$-Tridiagonalteilmatrixen aus und $A^{I,I}$ eine $P-1 \times P-1$-Diagonalmatrix ist. Die $A^{p,I}$ haben die allgemeine Form

$$A^{p,I} = \left(\begin{array}{c|c|c} \dots & \begin{array}{c} * \\ \\ * \end{array} & \dots \end{array}\right).$$

Gebietszerlegung

- Idee: Eliminiere Blöcke $A^{I,*}$ in der Blockdarstellung. Dadurch wird $A^{I,I}$ modifiziert, genauer entsteht folgende Blockdarstellung:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A^{0,0} & & & & A^{0,I} \\ & A^{1,1} & & & A^{1,I} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & A^{P-1,P-1} & A^{P-1,I} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & S \end{array}\right),$$

mit $S = A^{I,I} - \sum_{p=0}^{P-1} A^{I,p} \left(A^{p,p}\right)^{-1} A^{p,I}$.

- S wird allgemein als „Schurkomplement“ bezeichnet. Alle Eliminationen in $\sum_{p=0}^{P-1}$ können *parallel* durchgeführt werden.
- Nach Lösen eines Systems $Sy = d$ für die Interfaceunbekannten können die inneren Unbekannten wieder parallel berechnet werden.
- S hat Dimension $P-1 \times P-1$ und ist selbst dünn besetzt, wie wir gleich sehen werden.

Ausführen des Plans

1. Transformiere $A^{p,p}$ auf Diagonalgestalt.
($a_{i,j}$ bezeichnet $(A^{p,p})_{i,j}$, falls nicht anders angegeben):

$\forall p$ parallel

for $(k = 0; k < M - 1; k++)$ // untere Diagonale

{

$l = a_{k+1,k}/a_{k,k}$;

$a_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - l \cdot a_{k,k+1}$;

if $(p > 0)$ $a^{p,l}_{k+1,p-1} = a^{p,l}_{k+1,p-1} - l \cdot a_{k,p-1}$;

// fill-in linker Rand

$b^p_{k+1} = b^p_{k+1} - l \cdot b^p_k$;

} // $(M-1)7t_f$

for $(k = M - 1; k > 0; k--)$ // obere Diagonale

{

$l = a_{k-1,k}/a_{k,k}$;

$b^p_{k-1} = b^p_{k-1} - l \cdot b^p_k$;

if $(p > 0)$ $a^{p,l}_{k-1,p-1} = a^{p,l} - l \cdot a^{p,l}_{k,p-1}$; // linker Rand

if $(p < P - 1)$ $a^{p,l}_{k-1,p} = a^{p,l}_{k-1,p} - l \cdot a^{p,l}_{k,p}$; // rechter Rand, fill-in

} // $(M-1)7t_f$

Ausführen des Plans

2. Eliminiere in $A^{l,*}$.

$\forall p$ parallel:

if $(p > 0)$

{

$l = a^{l,p}_{p-1,0} / a^{p,p}_{0,0}$;

$a^{l,l}_{p-1,p-1} = a^{l,l}_{p-1,p-1} - l \cdot a^{p,l}_{0,p-1}$; // Diagonale in S

if $(p < P-1)$ $a^{l,l}_{p-1,p} = a^{l,l}_{p-1,p} - l \cdot a^{p,l}_{0,p}$; // obere Diag. in S, fill-in

$b^{l}_{p-1} = b^{l}_{p-1} - l \cdot b^{p}_{0}$;

}

if $(p < P-1)$

{ // rechter Rand

$l = a^{l,p}_{p,M-1} / a^{p,p}_{M-1,M-1}$;

if $(p > 0)$ $a^{l,l}_{p,p-1} = a^{l,l}_{p,p-1} - l \cdot a^{p,l}_{M-1,p-1}$;

// fill-in untere Diag von S

$a^{l,l}_{p,p} = a^{l,l}_{p,p} - l \cdot a^{p,l}_{M-1,p}$;

$b^{l}_{p} = b^{l}_{p} - l \cdot b^{p}_{M-1}$;

}

Ausführen des Plans

3. Löse Schurkomplement. S ist *tridiagonal* mit Dimension $P-1 \times P-1$. Nehme an, dass $M \gg P$ und löse sequentiell. $\longrightarrow 8Pt_f$ Aufwand.
4. Berechne innere Unbekannte Hier ist nur eine Diagonalmatrix je Prozessor zu lösen.

$\forall p$ parallel:

for $(k = 0; k < M-1; k++)$

$$x_k^p = (b_k^p - a_{k,p-1}^{p,l} \cdot x_{p-1}^l - a_{k,p}^{p,l} \cdot x_p^l)/a_{k,k}^{p,p};$$

// $M5t_f$

Analyse

- Gesamtaufwand parallel:

$$
\begin{aligned}
T_P(N,P) &= 14Mt_f + O(1)t_f + 8Pt_f + 5Mt_f = \\
&= 19Mt_f + 8Pt_f
\end{aligned}
$$

(ohne Kommunikation!)

$$
\begin{aligned}
E_{\max} &= \frac{8(MP+P-1)t_f}{(19Mt_f + 8Pt_f)P} \approx \\
&\underbrace{\approx}_{\text{für } P \ll M} \frac{1}{\frac{19}{8} + \frac{P}{M}} \leq \frac{8}{19} = 0.42
\end{aligned}
$$

- Der Algorithmus benötigt zusätzlichen Speicher für das fill-in. Zyklische Reduktion arbeitet mit Überschreiben der alten Einträge.

LU-Zerlegung dünnbesetzter Matrizen

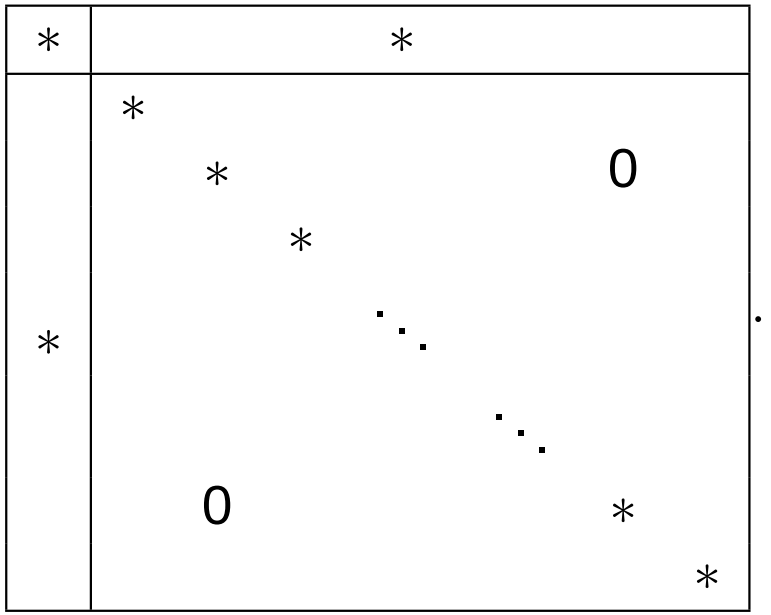
Was ist eine dünnbesetzte Matrix

- Im allgemeinen spricht man von einer dünnbesetzten Matrix, wenn sie in (fast) jeder Zeile nur eine konstante Anzahl von Nichtnullelementen besitzt.
- Ist $A \in \mathcal{R}^{N \times N}$, so hat A dann nur $O(N)$ statt N^2 Einträge.
- Für genügend großes N ist es dann bezüglich Rechenzeit und Speicher günstig, diese große Anzahl von Nullen nicht zu bearbeiten bzw. zu speichern.

LU-Zerlegung dünnbesetzter Matrizen

Fill-in

- Bei der *LU*-Zerlegung können im Verlauf des Eliminationsprozesses Elemente, die anfänglich Null waren, zu Nichtnullelementen werden.
- Man spricht dann von *„Fill-in“*.
- Dies hängt stark von der Struktur der Matrix ab. Als extremes Beispiel betrachte die „Pfeilmatrix“

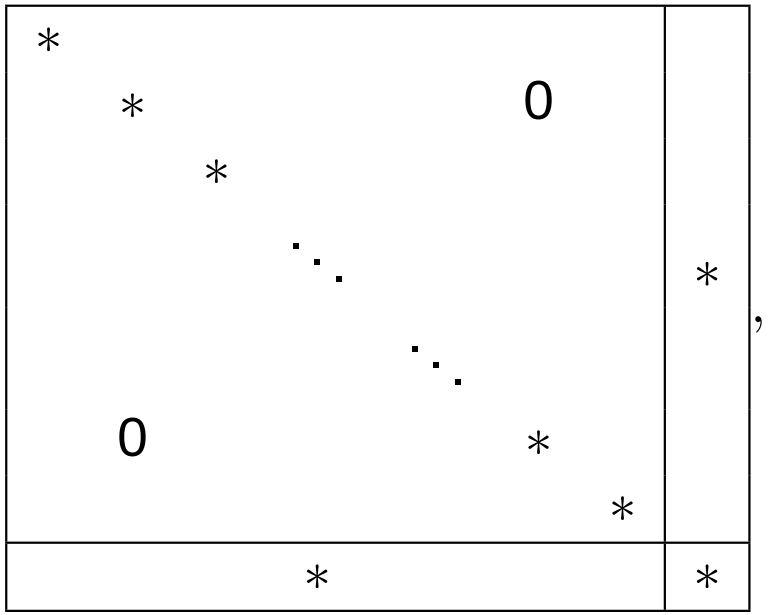


- Bei der Elimination in der natürlichen Reihenfolge (ohne Pivotisierung) läuft die gesamte Matrix voll.

LU-Zerlegung dünnbesetzter Matrizen

Umordnung der Matrix

- Bringt man die Matrix durch Zeilen- und Spaltenvertauschung auf die Form



- es entsteht offensichtlich kein Fill-in.
- Ein wichtiger Punkt bei der *LU*-Zerlegung dünnbesetzter Matrizen ist das Finden einer Anordnung der Matrix, so dass das Fill-in minimiert wird.
- Umordnung ist eng gekoppelt mit der Pivotisierung

Pivotisierung

- Ist die Matrix A symmetrisch positiv definit (SPD), so ist die LU-Faktorisierung immer numerisch stabil, und es ist *keine* Pivotisierung notwendig.

$\rightarrow$ Die Matrix kann also vorab so umgeordnet werden, dass das Fill-in klein wird.

- Bei einer allgemeinen, invertierbaren Matrix wird man pivotisieren müssen.

$\rightarrow$ Dann muss dynamisch während der Elimination ein Kompromiss zwischen numerischer Stabilität und Fill-in gefunden werden.

- Deshalb beschränken sich fast alle Codes auf den symmetrisch positiven Fall und bestimmen vorab eine Eliminationsreihenfolge, die das Fill-in minimiert.
- Eine exakte Lösung dieses Minimierungsproblems ist $\mathcal{NP}$-Vollständig.

$\rightarrow$ Man verwendet daher heuristische Verfahren.

Graph einer Matrix

Matrixgraph

- Im symmetrisch positiven Fall lässt sich das Fill-in rein anhand der Null-Struktur der Matrix untersuchen.
- Zu einem beliebigen, nun nicht notwendigerweise symmetrischen $A \in \mathcal{R}^{N \times N}$ definieren wir einen ungerichteten Graphen $G(A) = (V_A, E_A)$ mit

$$\begin{aligned} V_A &= \{0, \ldots, N-1\} \\ (i,j) \in E_A &\iff a_{ij} \neq 0 \vee a_{ji} \neq 0. \end{aligned}$$

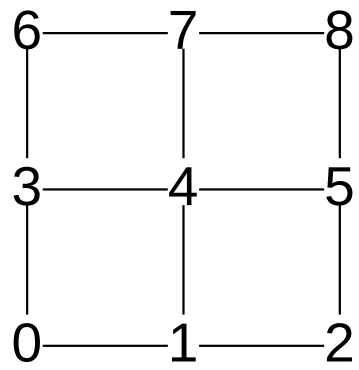
- Dieser Graph beschreibt die direkten Abhängigkeiten der Unbekannten untereinander.

Graph einer Matrix

Beispiel:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	∗	∗		∗					
1	∗	∗	∗		∗				
2		∗	∗			∗			
3	∗			∗	∗		∗		
4		∗		∗	∗	∗		∗	
5			∗		∗	∗			∗
6				∗			∗	∗	
7					∗		∗	∗	∗
8						∗		∗	∗

A

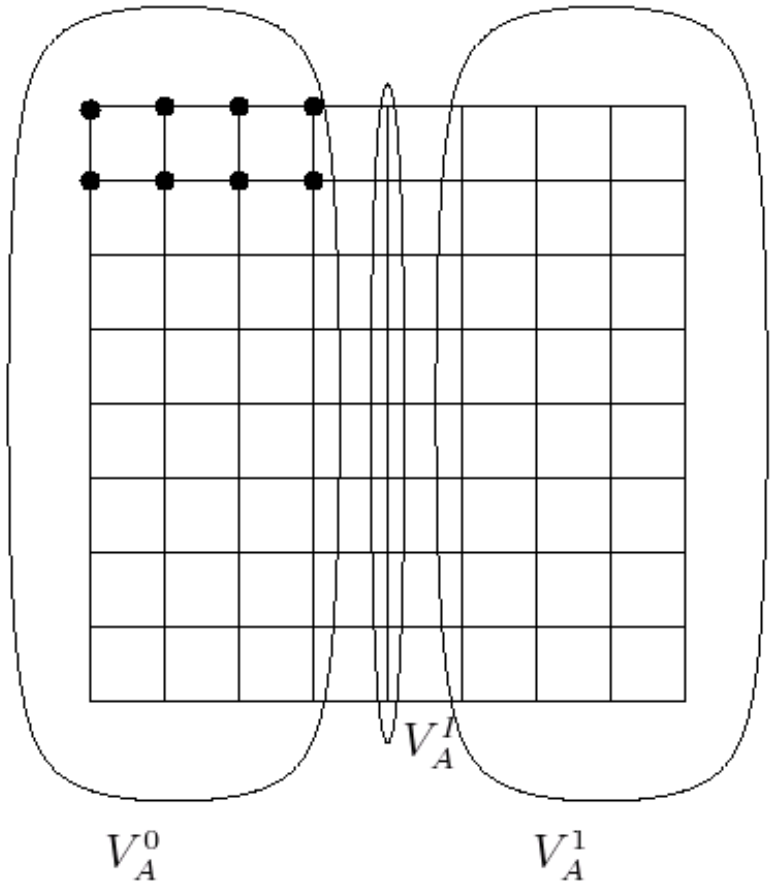


$G(A)$

Matrix-Anordnungsstrategien

Nested Disection

- Ein wichtiges Verfahren zur Anordnung von SPD-Matrizen zum Zwecke der Fill-in-Minimierung ist die „*nested disection*“.
- Beispiel:
  Der Graph $G(A)$ der Matrix A sei ein quadratisches Gitter



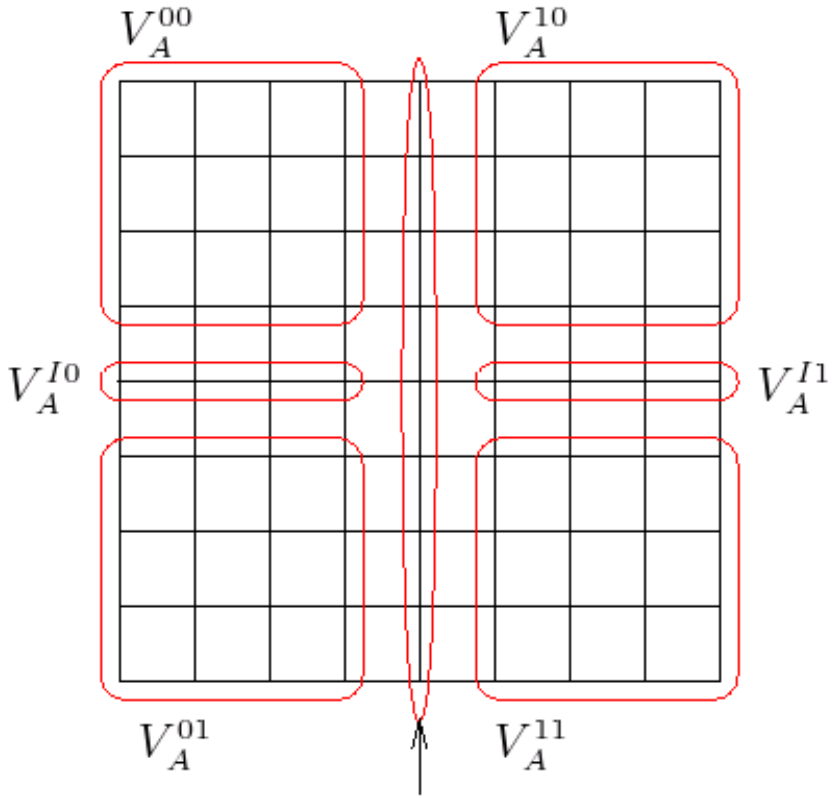
Matrix-Anordnungsstrategien

Nun teilen wir die Knotenmenge V_A in drei Teile: V_A^0, V_A^1 und V_A^I, so dass

- V_A^0 und V_A^1 sind (möglichst) groß,
- V_A^I ist ein Separator, d.h. bei Herausnahme von V_A^I aus dem Graphen zerfällt dieser in zwei Teile. Somit gibt es *kein* $(i,j) \in E_A$, so dass $i \in V_A^0$ und $j \in V_A^1$.
- V_A^I ist möglichst klein.
- Die Abbildung zeigt eine Möglichkeit für eine solche Aufteilung.

Matrix-Anordnungsstrategien

- Nun ordnet man die Zeilen und Spalten so um, dass zuerst die Indizes V_A^0, dann V_A^1 und zum Schluss V_A^I kommen.
- Dann wendet man das Verfahren *rekursiv* auf die Teilgraphen mit den Knotenmengen V_A^0 und V_A^1 an.
- Das Verfahren stoppt, wenn die Graphen eine vorgegebene Größe erreicht haben.
- Beispielgraph nach zwei Schritten:



Matrix-Anordnungsstrategien

	V_A^{00}	V_A^{01}	V_A^{I0}	V_A^{10}	V_A^{11}	V_A^{I1}	V_A^{I}
V_A^{00}	$*$	0	$*$				$*$
V_A^{01}	0	$*$	$*$				$*$
V_A^{I0}	$*$	$*$	$*$				$*$
V_A^{10}				$*$		$*$	$*$
V_A^{11}					$*$	$*$	$*$
V_A^{I1}				$*$	$*$	$*$	$*$
V_A^{I}	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

A, umgeordnet

Komplexität der Nested Disection

- Für obiges Beispiel führt die nested disection Nummerierung auf eine Komplexität von $O(N^{3/2})$ für die LU-Zerlegung.
- Zum Vergleich benötigt man bei lexikographischer Nummerierung (Bandmatrix) $O(N^2)$ Operationen.

Datenstrukturen für dünnbesetzte Matrizen

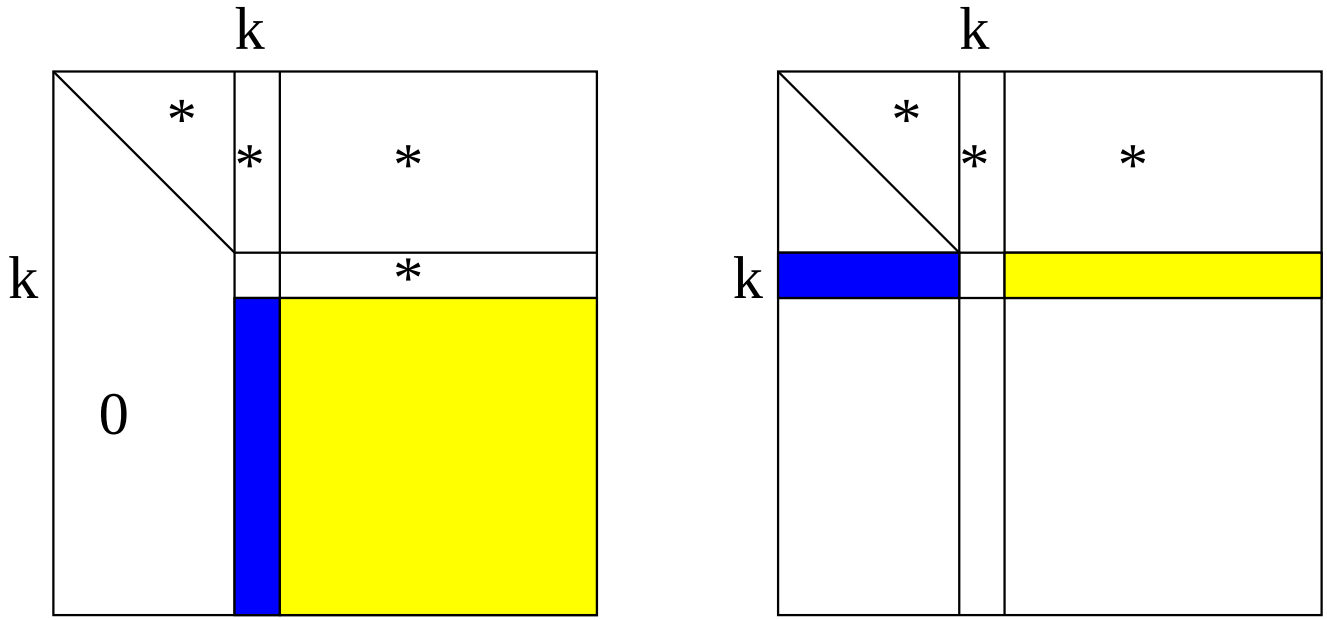
- Es gibt eine ganze Reihe von Datenstrukturen zur Speicherung von dünnbesetzten Matrizen.
- Ziel ist eine effiziente Implementierung von Algorithmen
- Somit ist auf Datenlokalität und möglichst wenig Overhead durch zusätzliche Indexrechnung zu achten.
- Eine oft verwendete Datenstruktur ist *„compressed row storage“*
- Hat die $N \times N$-Matrix insgesamt M Nichtnullelemente, so speichert man die Matrixelemente Zeilenweise in einem eindimensionalen Feld ab:
  double $a[M]$;
- Die Verwaltung der Indexinformation geschieht mittels dreier Felder
  int $s[N], r[N], j[M]$;
- Deren Belegung zeigt die Realisierung des Matrix-Vektor-Produktes $y = Ax$:

```
for (i = 0; i < N; i++) {
    y[i] = 0;
    for (k = r[i]; k < r[i] + s[i]; k++)
        y[i] += a[k] · x[j[k]];
}.
```

- r gibt den Zeilenanfang, s die Zeilenlänge, und j den Spaltenindex.

Eliminationsformen

- Bei der *LU*-Zerlegung für vollbesetzte Matrizen haben wir die sogenannte *kij*-Form der *LU*-Zerlegung verwendet.



- Dabei werden in jedem Schritt k alle a_{ik} für $i > k$ eliminiert, was eine Modifikation aller a_{ij} mit $i, j > k$ erfordert.
- Diese Situation ist links dargestellt.
- Bei der *kji*-Variante eliminiert man im Schritt k alle a_{kj} mit $j < k$.
- Dabei werden die a_{ki} mit $i \geq k$ modifiziert. Beachte, dass die a_{kj} von links nach rechts eliminiert werden müssen!
- Bei der folgenden sequentiellen *LU*-Zerlegung für dünnbesetzte Matrixen werden wir von dieser *kji*-Variante ausgehen.

Sequentieller Algorithmus

- Im folgenden setzen wir voraus:
  - Die Matrix A kann in der gegebenen Anordnung ohne Pivotisierung faktorisiert werden. Die Anordnung wurde in geeigneter Weise gewählt, um das Fill-in zu minimieren.
  - Die Datenstruktur speichert alle Elemente a_{ij} mit $(i,j) \in G(A)$. Wegen der Definition von $G(A)$ gilt:

$$(i,j) \notin G(A) \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0 \wedge a_{ji} = 0.$$

    Ist $a_{ij} \neq 0$, so wird in jedem Fall auch a_{ji} gespeichert, *auch wenn dies Null ist.* Die Matrix muss nicht symmetrisch sein.
- Die Erweiterung der Struktur von A geschieht rein aufgrund der Information in $G(A)$. So wird, falls $(k,j) \in G(A)$, auch ein a_{kj} formal eliminiert. Dies kann möglicherweise ein fill-in a_{ki} erzeugen, obwohl $a_{ki} = 0$ gilt.
- Der nun folgende Algorithmus verwendet die Mengen $S_k \subset \{0,\ldots,k-1\}$, welche im Schritt k genau die Spaltenindizes enthalten, die eliminiert werden müssen.

Sequentieller Algorithmus

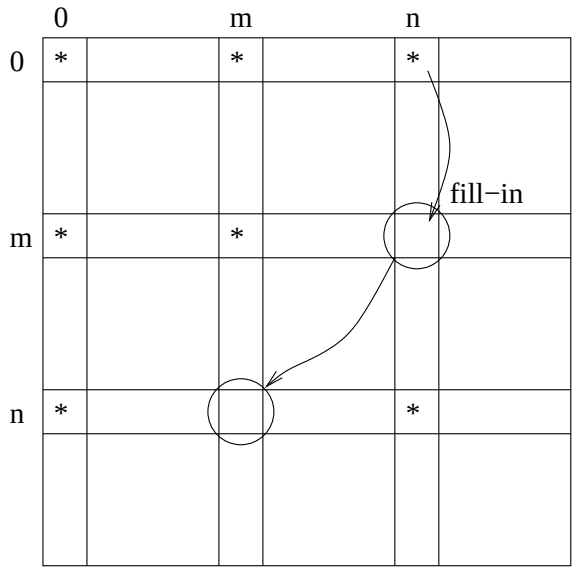
```
for (k = 0; k < N; k++) S_k = ∅;
for (k = 0; k < N; k++)
{
    // 1. erweitere Matrixgraph
    for (j ∈ S_k)
    {
        G(A) = G(A) ∪ {(k,j)};
        for (i = k; i < N; i++)
            if ((j,i) ∈ G(A))
                G(A) = G(A) ∪ {(k,i)};
    }

    // 2. Eliminiere
    for (j ∈ S_k)
    {                                   // eliminiere a_{k,j}
        a_{k,j} = a_{k,j} / a_{j,j};    // L-Faktor
        for (i = j + 1; i < N; i++)
            a_{k,i} = a_{k,i} − a_{k,j} · a_{j,i};
    }

    // 3. update S_i für i > k, geht wegen Symmetrie von E_A
    for (i = k + 1; i < N; i++)
        if ((k,i) ∈ G(A))               // ⇒ (i,k) ∈ G(A)
            S_i = S_i ∪ {k};
}
```

Sequentieller Algorithmus

- Betrachten wir in einem Beispiel, wie die S_k gebildet werden.



- Zu Beginn enthalte $G(A)$ die Elemente

$$G(A) = \{(0,0),(m,m),(n,n),(0,n),(n,0),(0,m),(m,0)\}$$

- Für $k = 0$ wird in Schritt 1 $S_m = \{0\}$ und $S_n = \{0\}$ gesetzt.
- Nun wird als nächstes bei $k = m$ das $a_{m,0}$ eliminiert.
- Dies erzeugt das Fill-in (m,n), was wiederum im Schritt 3 bei $k = m$ die Anweisung $S_n = s_n \cup \{m\}$ zur Folge hat.
- Somit gilt am Anfang des Schleifendurchlaufes $k = n$ korrekt $S_n = \{0,m\}$ und in Schritt 1 wird korrekt das Fill-in $a_{n,m}$ erzeugt, *bevor* die Elimination von $a_{n,\mathbf{0}}$ durchgeführt wird. Dies gelingt wegen der Symmetrie von E_A.

Parallelisierung

LU-Zerlegung dünnbesetzter Matrizen besitzt folgende Möglichkeiten zu einer Parallelisierung:

- *grobe Granularität:* In allen 2^d Teilmengen von Indizes, die man durch nested disection der Tiefe d gewinnt, kann man parallel mit der Elimination beginnen. Erst für die Indizes, die den Separatoren entsprechen, ist Kommunikation erforderlich.
- *mittlere Granularität:* Einzelne Zeilen können parallel bearbeitet werden, sobald die entsprechende Pivotzeile lokal verfügbar ist. Dies entspricht dem Parallelismus bei der dichten *LU*-Zerlegung.
- *feine Granularität:* Modifikationen einer einzelnen Zeile können parallel bearbeitet werden, sobald Pivotzeile und Multiplikator verfügbar sind. Dies nutzt man bei der zweidimensionalen Datenverteilung im dicht besetzten Fall.

Parallelisierung: Fall $N = P$

Programm (LU-Zerlegung für dünnbesetzte Matrizen und $N = P$)

```
parallel sparse-lu-1
{
    const int N = ...;
    process Π[int k ∈ {0, ..., N − 1}]
    {// (nur Pseudocode!)
        S = ∅;                                          // 1. Belege S
        for (j = 0; j < k; j++)
            if ((k, j) ∈ G(A)) S = S ∪ {j};             // der Anfang
        for (j = 0; j < k; j++)                         // 2. Zeile k bearbeiten
            if (j ∈ S_k)
            {
                recv(Π_j, r);                           // warte, bis Π_j die Zeile j schickt
                // erweitere Muster
                for (i = j + 1; i < N; i++)
                {
                    if (i < k ∧ (j, i) ∈ G(A))          // Info ist in r
                        S = S ∪ {i};                    // Prozessor i wird Zeile i schicken
                    if ((j, i) ∈ G(A) ∪ {(k, i)})       // Info ist in r
                        G(A) = G(A) ∪ {(k, i)};
                }
                // eliminiere a_{k,j} = a_{k,j} / a_{j,j};   // Info ist in r
                for (i = j + 1; i < N; i++)
                    a_{k,i} = a_{k,i} − a_{k,j} · a_{j,i};   // Info ist in r
            }
        for (i = k + 1; i < N; i++)                     // 3. wegschicken
            if ((k, i) ∈ G(A))                          // lokale Info!
                send Zeile k an Π_i;                    // k weiss, dass i die Zeile k braucht.
    }
}
```

Parallelisierung für $N \gg P$

Der Fall $N \gg P$

- Jeder Prozessor hat nun einen ganzen Block von Zeilen. Drei Dinge sind zu tun:
- *Empfange Pivotzeilen* von anderen Prozessoren und speichere diese in der Menge R.
- *Sende fertige Zeilen* aus einem Sendepuffer S zu den Zielprozessoren.
- *Lokale Elimination*
  - Wähle eine Zeile j aus dem Empfangspuffer R.
  - Eliminiere damit lokal alle möglichen $a_{k,j}$.
  - Wenn eine Zeile fertig wird, stecke sie in den Sendepuffer (es kann mehrere Zielprozessoren geben).