

Algebraisches Mehrgitterverfahren

Philipp Wilhelm
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg,
Mathematisches Institut,
Seminar Numerische Lineare Algebra,
Dozent: Prof. Bastian

20. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung** **2**
- 2 Voraussetzungen** **3**
- 3 Zweigitterverfahren** **4**
- 4 Algebraische Glättung** **6**
- 5 Konvergenz bei Nachglättung** **8**
- 6 Interpolation** **9**
- 7 Konvergenz bei Vorglättung** **11**
- 8 C/F-Aufteilung** **13**
 - 8.1 Standard Coarsening 13
 - 8.2 Aggressive Coarsening 13

Kapitel 1

Einleitung

Ziel des algebraischen Mehrgitterverfahrens ist es, Gleichungen der Form

$$A \cdot u = f$$

zu lösen. Mehrgitterverfahren sind auf der Grundlage von iterativen Verfahren entstanden. Solche Verfahren, wie das Gauss-Seidel-Verfahren oder das Jacobi Verfahren, sind ein wesentlicher Bestandteil des Mehrgitterverfahrens. Da iterative Verfahren nur hochfrequente Fehlerkomponenten schnell glätten, dient das Mehrgitterverfahren zur Effizienzsteigerung. Idee hierbei ist, dass die Korrektur auf einem gröberen Gitter berechnet wird und dann auf feinere Gitter durch Interpolation der fehlenden Punkte, der sogenannten Prolongation, übertragen wird. Ein iteratives Verfahren wird hierbei bei jedem Schritt zur Glättung des Fehlers benutzt. Je nach Ausrichtung des des Mehrgitterverfahrens werden eine feste Anzahl von Iterationsschritten durchgeführt. In der Regel wird sowohl eine Vorglättung als auch eine Nachglättung genutzt. Das rekursive Mehrgitterverfahren durchläuft einen V-Zirkel oder einen W-Zirkel. Die Besonderheit des algebraischen Mehrgitterverfahrens ist, dass es sich nicht auf geometrische Glattheit sondern auf algebraische Glattheit bezieht. Ein algebraisch glatter Fehler kann im geometrischen Sinne oszillierend sein. Durch den Bezug auf den algebraisch glatten Fehler wird sowohl die Menge der Probleme, auf die das AMG-Verfahren angewendet werden kann, erweitert, als auch eine Automatisierung des Verfahrens möglich. Die Gittergewinnung und die Berechnung der Interpolationsgewichte wird automatisiert. Neben der Lösungsphase verfügt das AMG-Verfahren über eine Setup-Phase, in der dies geleistet wird. Bedingt durch die zusätzliche Setup-Phase ist das AMG-Verfahren im direkten Vergleich mit geometrischen Mehrgitterverfahren meistens weniger effizient. Der Vorteil liegt somit nicht in einer Effizienzsteigerung, sondern der vereinfachten Anwendbarkeit des Verfahrens. Bevor jetzt eine Betrachtung des AMG-Verfahrens folgt, werden im nächsten Abschnitt zunächst einige benutzte Definitionen und Sätze gegeben.

Kapitel 2

Voraussetzungen

Zunächst einige verwendete Definitionen zur Erinnerung.

Definition 1

Eine symmetrische Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit wenn

$$(u, Au) > 0 \quad \forall u \neq 0.$$

Wir schreiben für eine positiv definite Matrix $A > 0$.

Definition 2

Eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ mit zugehöriger Vektornorm $\|\cdot\|$ ist gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Definition 3 Eine Matrix A ist eine M-Matrix wenn

- a) $a_{i,i} > 0 \quad \forall i$
- b) $a_{i,j} \leq 0 \quad \forall i \neq j$
- c) $A^{-1} \geq 0$

Einige Notationen sind noch festzuhalten. Für eine Matrix A bezeichnet $R(A)$ das Bild von A . Mit $N(A)$ wird der Kern von A bezeichnet.

$$\rho(A)$$

bezeichnet den Spektralradius. Mit (\cdot, \cdot) wird das euklidische Skalarprodukt bezeichnet. Folgende Skalarprodukte sind außerdem gegeben:

$$\begin{aligned}(u, v)_0 &= (D_h u, v) \\(u, v)_1 &= (A_h u, v) \\(u, v)_2 &= (D_h^{-1} A_h u, A_h v)\end{aligned}$$

Zudem wird noch folgendes Theorem für einige Beweise gebraucht, dass im Zusammenhang dieser Darstellung nicht bewiesen werden soll:

Theorem 1 Sei (\cdot, \cdot) ein beliebiges Skalarprodukt mit zugehöriger Norm und sei Q eine symmetrische Matrix bezüglich (\cdot, \cdot) . Es gelte $Q=Q$. Dann ist Q eine orthogonale Projektion. Das heißt, es gilt:

- 1) $R(Q) \perp R(E - Q)$
- 2) Für $u \in R(Q)$ und $v \in R(E - Q)$ gilt $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
- 3) $\|Q\| = 1$
- 4) $\forall u : \|Qu\| = \min_{v \in R(I-Q)} \|u - v\|$

Kapitel 3

Zweigitterverfahren

Da der Übergang von einem Zweigitterverfahren zu einem echten Mehrgitterverfahren durch Rekursion möglich ist, wird hier nun das dem Algebraischen Mehrgitterverfahren zugrundeliegende Zweigitterverfahren vorgestellt. Hierbei bezeichnet der Index h das Ausgangsgitter und der Index H das Grobgitter. Das Problem auf dem Ausgangsgitter lautet also folgendermaßen:

$$A_h u^h = f^h \text{ bzw. } \sum_{j \in \Omega^h} a_{i,j}^h u_j^h = f_i^h (i \in \Omega^h)$$
$$\text{mit } \Omega^h = \{1, \dots, n\}$$

Es wird angenommen, dass es sich bei A_h um eine dünnbesetzte Matrix handelt. Um ein System auf dem Grobgitter abzuleiten, muss zunächst Ω^h in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden.

$$\Omega^h = C^h \cup F^h$$

C^h beinhaltet hierbei die Variablen, die im Grobgitter enthalten sind. Ist eine solche Unterteilung vorhanden, kann $\Omega^H = C^h$ gesetzt werden. Das Problem auf dem Grobgitter sieht folgendermaßen aus:

$$A_H u^H = f^H \text{ bzw. } \sum_{l \in \Omega^H} a_{k,l}^H u_l^H = f_k^H (k \in \Omega^H)$$

Die Matrix A_h wird hierbei konstruiert durch

$$A_H := I_h^H A_h I_H^h$$

wobei I_H^h der Interpolationsoperator ist und $I_h^H = I_H^h{}^T$ ist.

Es wird zudem Glättung mit zugehörigem Glättungsoperator S_h benutzt:

$$u^h \rightarrow \bar{u}^h \text{ mit } \bar{u}^h = S_h u^h + (E - S_h) A_h^{-1} f^h$$

Als Glätter wird im folgenden Gauss-Seidel benutzt:

$$S_h = (E - Q_h^{-1} A_h) \text{ mit } Q_h = \text{untere Dreiecksmatrix von } A_h$$

Bemerkung 1 Die Grobgitterkorrektur ist gegeben durch

$$u_{neu}^h = u_{alt}^h + I_H^h e^H$$

und für den Fehler gilt mit dem Grobgitterkorrekturoperator $K_{h,H}$

$$e_{neu}^h = K_{h,H} e_{alt}^h \text{ mit } K_{h,H} = E - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$$

Ein Zweigitter Iterationsoperator ist gegeben durch

$$e_{neu}^h = M_{h,H} e_{alt}^h \text{ mit } M_{h,H}(v_1, v_2) = S_h^{v_1} K_{h,H} S_h^{v_2}$$

wobei v_1, v_2 die Anzahl der Vor- und Nachglättungsschritte ist.

Da gilt $I_h^h = I_H^h$ folgt das A_H symmetrisch und positiv definit ist.

Jede Interpolation ist von der Form:
$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & i \in C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & i \in F^h \end{cases}$$

Mit $P_i^h \subset C^h$ Menge der Interpolationsvariablen.

Die Gitterpunkte beim Algebraischen Mehrgitterverfahren sind die Knoten des gerichteten Graphen, der der gegebenen Matrix zugeordnet werden kann. Zwei Punkte $i, j \in \Omega^h$ sind verbunden wenn $a_{ij}^h \neq 0$. Die Nachbarschaft eines Punktes wird definiert durch:

$$N_i^h = \{j \in \Omega^h, j \neq i, a_{ij}^h \neq 0\}$$

Sich auf einen Punkt $i \in \Omega^h$ zu beziehen bedeutet nichts anderes als sich auf die Variable u_i^h zu beziehen.

Bemerkung 2 Mit der C/F-Aufteilung ist es für einige Überlegungen sinnvoll anzunehmen, dass Vektoren und Matrizen umgewandelt werden, so dass:

$$A_h u = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_C \end{pmatrix} \text{ und } I_H^h = \begin{pmatrix} I_{FC} \\ I_{CC} \end{pmatrix}$$

wobei I_{CC} die Einheitsmatrix ist.

Setzt man in Theorem 1 $K_{h,H}$ ein erhält man folgendes Korollar.

Korollar 1 Sei $A_h \neq 0$ und sei eine C/F-Aufteilung und eine Interpolation I_H^h vollen Ranges gegeben. Dann ist der Grobgitterkorrekturoperator $K_{h,H}$ eine orthogonale Projektion bezüglich $(\cdot, \cdot)_1$. Wir erhalten

- 1) $R(K_{h,H}) \perp_1 R(E - K_{h,H}) = R(I_H^h)$
- 2) Für $u^h \in R(K_{h,H})$ und $v^h \in R(I_H^h)$ gilt $\|u^h + v^h\|_1^2 = \|u^h\|_1^2 + \|v^h\|_1^2$
- 3) $\|K_{h,H}\|_1 = 1$
- 4) $\forall e^h : \|K_{h,H} e^h\|_1 = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_1$

Aus 4 folgt, dass die Grobgitterkorrektur die Energienorm $(\cdot, \cdot)_1$ des Fehlers minimiert für beliebige Variationen $R(I_H^h)$. Ein Zweigitterverfahren konvergiert immer für $\|S_h\|_1 \leq 1$. Das gilt auch für den kompletten V-Zirkel.

Kapitel 4

Algebraische Glättung

Definition 4 Ein Fehler e ist algebraisch glatt, wenn er langsam bezüglich S_h konvergiert, d.h. wenn

$$S_h e \approx e$$

D.h. wir nennen einen Fehler algebraisch glatt, wenn er durch ein gröberes Gitter approximiert werden muss, um die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen.

Lemma 1 Sei $A > 0$. Die folgenden Ungleichungen gelten $\forall e^h$

$$1) \|e^h\|_1^2 \leq \|e^h\|_0 \|e^h\|_2$$

$$2) \|e\|_2^2 \leq \rho(D^{-1}A) \|e\|_1^2$$

$$3) \|e\|_1^2 \leq \rho(D^{-1}A) \|e\|_0^2$$

Werden diese Normen auf die Eigenvektoren von $D^{-1}A$ angewendet erhält man:

$$D^{-1}A\phi = \lambda\phi \implies \|\phi\|_2^2 = \lambda\|\phi\|_1^2 \text{ und } \|\phi\|_2^2 = \lambda\|\phi\|_0^2$$

Beweis:

$$1) \|e\|_1^2 = (Ae, e) = (D^{-\frac{1}{2}}Ae, D^{\frac{1}{2}}e)$$

mit Cauchy-Schwarz gilt:

$$|(D^{-\frac{1}{2}}Ae, D^{\frac{1}{2}}e)| \leq \|D^{-\frac{1}{2}}Ae\| \|D^{\frac{1}{2}}e\| = \sqrt{(D^{-\frac{1}{2}}Ae, D^{-\frac{1}{2}}Ae)} \sqrt{(D^{\frac{1}{2}}e, D^{\frac{1}{2}}e)} = \sqrt{(D^{-1}Ae, Ae)} \sqrt{(De, e)} = \|e\|_2 \|e\|_0$$

2+3) Aus der Ungleichung: $(B_1e, e) \leq c(B_2e, e) \iff \rho(B_2^{-1}B_1) \leq c$ für $B_1, B_2 > 0$ folgt mit $c = \rho(D^{-1}A)$

$$A_h e, e \leq \rho(D^{-1}A)(D_h e, e) = \rho(D^{-1}A) \|e\|_0^2$$

$$\text{ebenso folgt } (D^{-1}Ae, Ae) = (AD^{-1}Ae, e) \leq \rho(A^{-1}AD^{-1}A)(Ae, e) = \rho(D^{-1}A)(Ae, e)$$

Das brige folgt durch einsetzen. \square

Die Eigenvektoren von $D^{-1}A$ spielen eine wichtige Rolle. Eigenvektoren die zu kleinen Eigenwerten gehören verursachen langsame Konvergenz bzgl. S_h und stimmen daher mit algebraisch glatten Fehlern überein. Es kann bei allen Anwendungsfällen des AMG-Verfahrens davon ausgegangen werden, dass der kleinste Eigenwert bei 0 liegt (da sonst das AMG-Verfahren nicht benötigt wird).

Werden die Normen bei langsam konvergierenden Fehlern e angewendet gilt: $\|e\|_2 \ll \|e\|_1$ und $\|e\|_1 \ll \|e\|_0$.

Bei nicht algebraisch glatten Fehlern sind sie etwa gleich groß. Durch dieses unterschiedliche Verhalten kann ein langsam konvergierender Fehler erkannt werden.

$$\|Se\|_1^2 \leq \|e\|_1^2 - \sigma \|e\|_2^2 \quad (\sigma > 0)$$

gilt mit σ unabhängig von e .

Folgerung 1 S reduziert den Fehler e effizient, solange $\|e\|_2$ relativ groß ist im Vergleich zu $\|e\|_1$ und wird ineffizient, wenn $\|e\|_2 \ll \|e\|_1$. Ein solcher Fehler wird algebraisch Glatt genannt

Definition 6 S erfüllt die Glättungsbedingung bzgl. eine Klasse \mathcal{A} wenn

$$\|Se\|_1^2 \leq \|e\|_1^2 - \sigma \|e\|_2^2 \quad (\sigma > 0)$$

für alle Matrizen in \mathcal{A} gilt mit einem festen σ .

Es sollen nun die Glättungseigenschaften des Gauss-Seidel-Verfahrens bezüglich der algebraischen Glätte gezeigt werden. Dazu wird nun zunächst folgender Hilfssatz gezeigt.

Lemma 2 Sei $A > 0$ und sei der Glättungsoperator $S = E - Q^{-1}A$ mit einer nichtsingulären Matrix Q . Dann ist die Glättungsbedingung äquivalent zu:

$$\sigma Q^T D^{-1} Q \leq Q + Q^T - A$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|Se\|_1^2 &= (ASe, Se) = (A(E - Q^{-1}Ae), E - Q^{-1}Ae) = (Ae, e) - (Ae, Q^{-1}Ae) - (AQ^{-1}Ae, e) + (AQ^{-1}Ae, Q^{-1}Ae) = \\ &\|e\|_1^2 - (Ae - AQ^{-1}Ae, Q^{-1}Ae) - (Q^T Q^{-1}Ae, Ae) = \|e\|_1^2 - ((Q + Q^T - A)Q^{-1}Ae, Q^{-1}Ae) \end{aligned}$$

Also ist die Glättungsbedingung äquivalent zu

$$\begin{aligned} \sigma \|e\|_2^2 &\leq ((Q + Q^T - A)Q^{-1}Ae, Q^{-1}Ae) \\ \iff \sigma (D^{-1}QeQe) &\leq ((Q + Q^T - A)e, e) \square \end{aligned}$$

Theorem 2 Sei $A > 0$ und definiert man mit jedem Vektor $w = (w_i) > 0$

$$\begin{aligned} \gamma_- &= \max_i \left(\frac{1}{w_i a_{ii}} \sum_{j < i} w_j |a_{ji}| \right) \\ \gamma_+ &= \max_i \left(\frac{1}{w_i a_{ii}} \sum_{j > i} w_j |a_{ji}| \right) \end{aligned}$$

Dann erfüllt das Gauss-Seidel-Verfahren die Glättungsbedingung mit $\sigma = \frac{1}{(1+\gamma_-)(1+\gamma_+)}$

Beweis: Die Annahmen von Lemma 1 sind erfüllt mit Q einer unteren Dreiecksmatrix von A . Es gilt $Q + Q^T - A = D$. Die Glättungsbedingung ist äquivalent zu

$$\sigma (Q^T D^{-1} Qe, e) \leq (De, e)$$

was äquivalent ist zu

$$\sigma \leq \frac{1}{\rho(D^{-1}Q^T D^{-1}Q)}$$

Eine hinreichende Bedingung für die Ungleichung ist gegeben durch

$$\sigma \leq \frac{1}{\|D^{-1}Q^T\| \|D^{-1}Q\|}$$

Wobei $\|\cdot\|$ für eine beliebige von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm steht. Wählt man die Matrixnorm folgendermaßen:

$$\|L\| = \|L\|_w = \max_i \left(\frac{1}{w_i} \sum_j w_j |l_{ij}| \right)$$

erhält man $\|D^{-1}Q\| = 1 + \gamma_-$ und $\|D^{-1}Q^T\| = 1 + \gamma_+$ womit das Theorem bewiesen ist. \square

Es kann geschlossen werden, dass das Gauss-Seidel-Verfahren für alle wichtigen Klassen von Matrizen als Glätter genutzt werden kann. So zum Beispiel für alle symmetrische positiv definiten Matrizen.

Kapitel 5

Konvergenz bei Nachglättung

Pro Durchlauf wird nur ein Glättungsschritt durchgeführt. Es wird der Operator $S_h K_{h,H}$ betrachtet. Damit $S_h K_{h,H}$ klein wird ist es wichtig, dass S alle Vektoren in $R(K)$ effizient reduziert. Das Glätten des Fehlers wird weniger effizient, je kleiner $\|e\|_2$ in Relation zu $\|e\|_1$ ist. Es muss gefordert werden, dass $\forall e \in R(K)$ $\|e\|_2$ durch $\|e\|_1$ begrenzt ist.

Theorem 3 Sei $A > 0$ und S erfülle die Glättungsbedingung. Angenommen die C/F-Aufteilung und die Interpolation sei so beschaffen, das gilt:

$$\|Ke\|_1^2 \leq \tau \|Ke\|_2^2$$

mit $\tau > 0$ unabhängig von e . Dann gilt $\tau > \sigma$ und $\|SK\|_1 \leq \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\tau}}$

Beweis: Setzt man Ke in die Glättungsbedingung ein erhält man

$$\|SKe\|_1^2 \leq \|Ke\|_1^2 - \sigma \|Ke\|_2^2 \leq \|Ke\|_1^2 - \frac{\sigma}{\tau} \|Ke\|_1^2 \leq (1 - \frac{\sigma}{\tau}) \|e\|_1^2 \quad \square$$

Theorem 4 Wenn die C/F-Aufteilung und die Interpolation I_{FC} so beschaffen sind, dass

$$\forall e \quad \|e_F - I_{FC}e_C\|_{0,F}^2 \leq \tau \|e\|_1^2$$

gilt mit τ unabhängig von e , dann gilt $\|Ke\|_1^2 \leq \tau \|Ke\|_2^2$

Beweis: Sei $e \in R(K)$ gegeben. Für beliebige e^H folgt mit Korollar 1:

$$\|e\|_1^2 = (Ae, e) - 0 = (Ae, e) - (Ae, I_H^h e^H) = (Ae, e - I_H^h e^H) = (D^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} Ae, e - I_H^h e^H) = (D^{-\frac{1}{2}} Ae, D^{\frac{1}{2}} (e - I_H^h e^H))$$

mit der Cauch-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$\leq (D^{-\frac{1}{2}} Ae, D^{-\frac{1}{2}} Ae) (D^{\frac{1}{2}} (e - I_H^h e^H), D^{\frac{1}{2}} (e - I_H^h e^H)) = (D^{-1} Ae, e) (D(e - I_H^h e^H), e - I_H^h e^H) = \|e\|_2^2 \|e - I_H^h e^H\|_0$$

Wählt man e^H als direkte Projektion von e zum nächst größeren Gitter erhält man:

$$\|e - I_H^h e^H\|_0 = \|e_F - I_{FC}e_C\|_{0,F} \implies \|e\|_1^2 \leq \tau \|e\|_2^2$$

$$(Denn \|e\|_1^2 \leq \|e\|_2 \|e - I_H^h e^H\|_0 \iff \frac{\|e\|_1^2}{\|e\|_2} \leq \|e - I_H^h e^H\|_0 \iff \frac{\|e\|_1^4}{\|e\|_2^2} \leq \|e_F - I_{FC}e_C\|_{0,F}^2$$

$$\implies \frac{\|e\|_1^4}{\|e\|_2^2} \leq \tau \|e\|_1^2 \implies \|e\|_1^2 \leq \|e\|_2^2)$$

$$\forall e \in R(K) \implies \|Ke\|_1^2 \leq \tau \|Ke\|_2^2 \quad \square$$

Ziel ist es zu zeigen, dass für alle Matrizen A aus einer Klasse \mathcal{A} Konvergenz vorliegt. Es wurde gezeigt, dass die Glättungsbedingung von iterativen Verfahren erfüllt wird für Klassen \mathcal{A} von Matrizen. Theorem 3 impliziert die gesuchte Konvergenz, wenn gezeigt werden kann, dass eine Interpolation konstruiert werden kann, die die Bedingung von Theorem 4 für alle Matrizen aus \mathcal{A} erfüllt.

Kapitel 6

Interpolation

Es wird nun ein automatisches Konstruktionsverfahren für eine Interpolation hergeleitet. Im Rahmen dieser Ausarbeitung wird von M-Matrizen ausgegangen.

Bei einer gegebenen C/F-Aufteilung und einer Menge von Interpolationspunkten $P_i \subset C$ ($i \in F$) sollen die Gewichte w_{ik} in

$$e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k \quad (i \in F) \quad (6.1)$$

so definiert werden, dass (6.1) eine vernünftige Approximation für jeden algebraisch glatten Fehler e , welcher annähernd

$$a_{ii} e_i + \sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j = 0 \quad (i \in F) \quad (6.2)$$

erfüllt, liefert.

Die Interpolation hängt von der C/F-Aufteilung ab. Die C/F-Aufteilung muss so gestaltet sein, dass jeder F-Punkt eine ausreichende Verbindung zu den C-Punkten hat. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass $P_i \subset C \cap N_i$ ist wobei N_i die direkte Nachbarschaft von i darstellt.

Bemerkung 3 Variable ohne Verbindung zu irgendeiner Variablen (Matrix-Reihen mit lauter Nullen) werden automatisch zu F-Variablen, die allerdings keine Interpolation benötigen. Dieser Fall ist im Folgenden ausgeschlossen.

Für symmetrische M-Matrizen variiert der algebraisch glatte Fehler langsam in Richtung starker Bindungen. D.h. der Fehler an einem Punkt i ist wesentlich durch das gewichtet Mittel der Fehler der starken Nachbarn bestimmt. Je mehr starke Verbindungen i in $P_i \subset C \cap N_i$, $P_i \neq \emptyset$ enthalten sind, desto besser wird

$$\frac{1}{\sum_{k \in P_i} a_{ik}} \sum_{k \in P_i} a_{ik} e_k \approx \frac{1}{\sum_{j \in N_i} a_{ij}} \sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j$$

erfüllt. Man kann (6.2) durch

$$a_{ii} e_i + \alpha_i \sum_{k \in P_i} a_{ik} e_k = 0$$

$$\text{mit } \alpha_i = \frac{\sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\sum_{k \in P_i} a_{ik}}$$

annähern. Dies führt zu der Interpolationsformel (6.1) mit von der Matrix abhängigen positiven Gewichten:

$$w_{ik} = -\alpha_i \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \quad (i \in F, k \in P_i)$$

Theorem 5 Sei A eine symmetrische M-Matrix mit

$$s_i = \sum_{k \in P_i} |a_{ik}| \geq \frac{1}{\tau} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|$$

Dann genügt die Interpolation $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$ mit $w_{ik} = -\alpha_i \frac{a_{ik}}{a_{ii}}$ der Bedingung

$$\|e_F - I_{FC} e_C\|_{0,F}^2 \leq \tau \|e\|_1^2$$

Beweis. Da Matrizen mit Nullzeilen ausgeschlossen sind gilt: $\Gamma_i \neq \emptyset \forall i \in F$

$$\text{Wegen } \|e\|_1^2 = (Ae, e) = \sum_{i,j} a_{ij}e_i e_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (-a_{ij})(e_i - e_j)^2 + \sum_i s_i e_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (-a_{ij})(e_i - e_j)^2 + \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right) e_i^2$$

$$\text{Gilt } \|e\|_1^2 \geq \sum_{i \in F} \left(\sum_{k \in P_i} (-a_{ik})(e_i - e_k)^2 + s_i e_i^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \|e_F - I_{FC}e_C\|_{0,F}^2 &= \sum_{i \in F} a_{ii} \left(e_i - \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k \right)^2 = \sum_{i \in F} a_{ii} \left(\sum_{k \in P_i} w_{ik} (e_i - e_k) + \left(1 - \sum_{k \in P_i} w_{ik} \right) e_i \right)^2 \\ &\leq \sum_{i \in F} a_{ii} \left(\sum_{k \in P_i} w_{ik} (e_i - e_k)^2 + \left(1 - \sum_{k \in P_i} w_{ik} \right) e_i^2 \right) \end{aligned}$$

Es gilt $a_{ii}(1 - \sum_{k \in P_i} w_{ik}) = s_i = \sum_j a_{ij}$, denn

$$a_{ii} \left(1 - \sum_{k \in P_i} w_{ik} \right) = a_{ii} - \sum_{k \in P_i} \alpha_i a_{ik} = a_{ii} + \alpha_i \sum_{k \in P_i} a_{ik} = a_{ii} + \sum_{j \in N_i} a_{ij} = \sum_j a_{ij}$$

Dies in Betracht ziehend folgt aus den beiden Abschätzungen

$$\|e_F - I_{FC}e_C\|_{0,F}^2 \leq \tau \|e\|_1^2$$

wenn $a_{ii}w_{ik} \leq \tau |a_{ik}|$ gilt für $i \in F, k \in P_i$

$$\iff \alpha_i \leq \tau \quad (i \in F) \iff \sum_{k \in P_i} |a_{ik}| \geq \frac{1}{\tau} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \quad \square$$

Auf die schwache Diagonaldominanz der Matrix A kann verzichtet werden.

Die Wahl von τ ist entscheidend für die Wahl einer C/F-Aufteilung. Für großes τ ist starke Vergrößerung möglich, aber man erhält eine sehr langsame Zweigitterkonvergenz. $\tau = 1$ liefert die beste Konvergenz, führt aber dazu, dass alle Nachbarn eines Punktes $i \in F$ in C sein müssen. Mit $\tau = 2$ muss die Hälfte der gesamten Verbindungsstärke im nächst größeren Gitter sein. Um mit möglichst wenigen C-Punkten auszukommen, sollten die C-Punkte nur von den stärksten Verbindungen jedes F-Punktes ausgewählt werden.

Die gefundene Interpolation kann verallgemeinert werden auf diagonaldominante symmetrische positiv definite Matrizen. Auch wenn die Konvergenz für größere Klassen nur schwer oder nicht gezeigt werden kann, zeigt sich in der Praxis, dass das Verfahren auf ein größere Gruppe von Matrizen anwendbar ist.

Kapitel 7

Konvergenz bei Vorglättung

Im Fall der Vorglättung wird bei der Konvergenzuntersuchung von folgender Abschätzung ausgegangen.

Korollar 2 Die Zweigitterschätzung $\|KS^\nu\|_1 \leq \eta$ gilt genau dann, wenn es für alle e ein e^H gibt so dass

$$\|S^\nu e - I_H^h e^H\| \leq \eta \|e\|_1$$

F-Glättung

Angenommen A_{FF} sei stark diagonaldominant

$$a_{ii} - \sum_{j \in F} |a_{ij}| \geq \delta a_{ij} \quad (i \in F)$$

mit festem $\delta > 0$.

Im folgenden sei \mathcal{E} ein Unterraum. Für jedes $e = (e_F, e_C)^T$ wird die Projektion in \mathcal{E} mit \hat{e} bezeichnet

$$\hat{e} := (\hat{e}_F, e_C)^T \text{ mit } \hat{e}_F := I_{FC}^{\hat{}} e_C = A_{FF}^{-1} A_{FC} e_C, \hat{e}_C = e_C$$

Ein F-Glättungsschritt besteht aus

$$u \rightarrow \bar{u} \text{ mit } Q_{FF} \bar{u}_F + (AFF - Q_{FF}) u_F + A_{FC} u_C = f_F, \quad \bar{u}_C = u_C$$

Q_{FF} ist die untere diagonale Dreiecksmatrix von A_{FF} im Falle des Gauss Seidel Verfahrens. Es gilt:

$$\bar{u}_F = S_{FF} u_F + (I_{FF} - S_{FF}) A_{FF}^{-1} (f_F - A_{FF} u_C)$$

oder bezüglich des Fehlers

$$\bar{e}_F = S_{FF} e_F - (I_{FF} - S_{FF}) A_{FF}^{-1} A_{FC} e_C, \quad \bar{e}_C = e_C$$

$S_{FF} = I_{FF} - Q_{FF}^{-1} A_{FF}$ bezeichnet die Iterations Matrix

Theorem 6 Sei $A > 0$ und sei eine C/F-Aufteilung gegeben, so dass A_{FF} stark diagonal dominant ist mit festem $\delta > 0$. Sei das Glätten durchgeführt durch $\nu \geq F$ -Glättungsschritte. Die Interpolation sei definiert durch $I_{FC} = I_{FC}^\mu$ mit $\mu \geq 0$ und $I_{FC}^{(0)}$ erfülle

$$\|(I_{FC}^{\hat{}} - I_{FC}^{(0)}) e_C\|_{1,F} \leq \tau \|e\|_1$$

$\forall e$ mit $\tau \geq 0$ unabhängig von e . Dann gilt:

$$\|KS^\nu e\|_1 \leq (\|S_{FF}\|_{1,F}^\nu + \tau \|P_{FF}\|_{1,F}^\mu) \|e\|_1$$

Ziel ist es die aus der Betrachtung der Nachglättung gewonnenen Erkenntnisse auf den Fall der Vorglättung übertragen zu können. Dies wird durch folgendes Lemma gewährleistet.

$$a) \|e_F - I_{FC}e_C\|_{0,F}^2 \leq \tau_1 \|e\|_1^2$$

$$b) \|\hat{I}_{FC} - I_{FC}\|_{1,F}^2 \leq \tau_2 \|e\|_1^2$$

Wenn a für alle e gilt und $\eta \geq \rho(D^{-1}A)$, dann gilt b für alle e mit $\tau_1 = \tau_2$. Wenn b für alle e gilt und A_{FF} streng diagonal dominant ist, dann gilt a für alle e mit $\tau_1 = \frac{(1+\sqrt{\tau_2})^2}{\delta}$.

Beweis:

$$\rho(D_{FF}^{-1}A_{FF}) = \sup_{e_F} \frac{(A_{FF}e_F, e_F)}{(D_{FF}e_F, e_F)} = \sup_{(e_F, 0)^T} \frac{(Ae, e)}{(De, e)} \leq \sup_e \frac{(Ae, e)}{(De, e)} = \rho(D^{-1}A)$$

Angenommen a gilt und wegen Lemma 1 folgt:

$$\|e_F - I_{FC}e_C\|_{1,F}^2 \leq \eta \|e_F - I_{FC}e_C\|_{0,F}^2 \leq \eta \tau_1 \|e\|_1^2$$

Wird dies auf \hat{e} anstatt e angewandt erhält man

$$\|\hat{e}_F - I_{FC}e_C\|_{1,F}^2 = \|(\hat{I}_{FC} - I_{FC})e_C\|_{1,F}^2 \leq \eta \tau_1 \|\hat{e}\|_1^2 \leq \eta \tau_1 \|e\|_1^2$$

Damit ist die erste Aussage gezeigt.

Bezüglich der zweiten Aussage gilt für jedes e

$$\|e_F - I_{FC}e_C\|_{1,F} \leq \|e_F - \hat{e}_F\|_{1,F} + \|(\hat{I}_{FC} - I_{FC})e_C\|_{1,F} \leq (1 + \sqrt{\tau_2}) \|e\|_1$$

$$\text{Da } \rho(A_{FF}^{-1}D_{FF}) = \frac{1}{\min\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } D_{FF}^{-1}A_{FF}\}} \leq \frac{1}{\delta}$$

schließen wir

$$\|e_F - I_{FC}e_C\|_{0,F}^2 \leq \rho(A_{FF}^{-1}D_{FF}) \|e_F - I_{FC}e_C\|_{1,F}^2 \leq \frac{1}{\delta} (1 + \sqrt{\tau_2})^2 \|e\|_1^2 \quad \square$$

Kapitel 8

C/F-Aufteilung

Neben der Berechnung des Interpolationsoperators gehört die C/F-Aufteilung mit in die Setup-Phase. Durch die C/F-Aufteilung wird das Grobgitter festgelegt. Das Ziel ist es, die Zahl der C-Variablen zu minimieren und dennoch zu garantieren, dass alle F-Variablen ausreichend stark mit C-Variablen verbunden sind.

Definition 7 Variable i ist stark negativ verbunden mit j , wenn

$$-a_{ij} \geq \varepsilon \max_{a_{ik} < 0} |a_{ik}| \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < 1$$

$$S_i := \{j \in N_i \mid i \text{ ist stark negativ mit } j \text{ verbunden}\}$$

8.1 Standard Coarsening

Algorithmus

- 1) Es wird eine Variable i ausgewählt, die C-Variable wird
- 2) $\forall j \in S_i^T = j \in \Omega; i \in S_j$ gilt j wird F-Variable
- 3) Gibt es noch nicht zugeordnete Variablen wird eine von diesen ausgewählt und zur C-Variable und es wird mit Schritt 2 fortgefahren.

Um die Verteilung der C-Variablen zu verbessern, werden diese nach einer ihnen zugeordneten Gewichtung ausgewählt.

U := Menge unzugeordneter Variablen

$$\lambda_i = |S_i^T \cap U| + 2|S_i^T \cap F| \quad (i \in U)$$

λ_i bemisst den Nutzen von i als C-Variable.

8.2 Aggressive Coarsening

Um auch indirekte Zusammenhänge ausnutzen zu können, wird zum aggressive Coarsening übergegangen. Die Variablen müssen nicht mehr direkt verbunden sein, sondern können auch über einen Pfad miteinander verbunden sein. Hiermit lässt sich die Anzahl der C-Punkte nochmals drastisch reduzieren. Lohnend ist die Anwendung allerdings nur auf dem feinsten Level.

Literaturverzeichnis

- [1] K. Stüben: *An Introduction to Algebraic Multigrid Methods*. In U. Trottenberg, C. Oosterlee and A. Schüller: *Multigrid*, Academic Press 2001.
- [2] J.W. Ruge, K. Stüben: *Algebraic Multigrid*. In Stephen F. McCormick: *Multigrid Methods*, Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia 1987.
- [3] Christian Wagner, *Introduction to Algebraic Multigrid*. Course Notes of an Algebraic Multigrid Course at the University of Heidelberg in the Wintersemester 1998/99.
- [4] Rolf Rannacher, *Einführung in die Numerische Mathematik*. Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg Vorlesungsskriptum SS 2005.
- [5] Nicolas Neuß, *Numerische lineare Algebra*. IWR, Universität Heidelberg Wintersemester 2004/2005.